

**Existenz und Invarianzeigenschaften
modifizierter Wellenoperatoren**

D i p l o m a r b e i t

am

Fachbereich Mathematik
der
Technischen Universität Berlin

angefertigt

bei

Prof. Dr. Rainer Wüst

von

Detlev Marpe

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Grundlegende Definitionen und Sätze	4
1.1 Bezeichnungen	4
1.2 Kurzreichweitige Potentiale und gewöhnliche Wellenoperatoren	5
1.3 Das Coulomb – Potential und die Notwendigkeit modifizierter Wellenoperatoren	6
1.4 Definition langreichweitiger und zulässiger Potentiale	12
1.5 Lösungen der Hamilton–Jacobi Gleichung und die Existenz modifizierter Wellenoperatoren ...	13
2. Existenz- und Invarianzkriterien	19
2.1 Kriterien für die Invarianz der Wertebereiche verschiedenartig modifizierter Wellenoperatoren	20
2.2 Gewöhnliche Wellenoperatoren im Kontext der modifizierten Theorie	25
2.3 Definition zeitabhängiger Modifikatoren und eine erste Existenz- und Invarianzaussage	26
3. Iterierte Modifikationsterme	33
3.1 Definition und Eigenschaften	33
3.2 Ein Existenzbeweis für die Dollard – Wellenoperatoren	42
3.3 Zwei Lemmata zur Vorbereitung einer allgemeinen Existenz- und Invarianzaussage	43
4. Äquivalenz verschiedenartig modifizierter Wellenoperatoren	49
4.1 Eine verallgemeinerte Existenz- und Invarianzaussage	49
4.2 Ein Existenzbeweis für die mit iterierten Modifikationstermen gebildeten Wellenoperatoren ...	52
4.3 Eine allgemeine Existenz- und Invarianzaussage bezüglich zeitabhängiger Modifikatoren	55
5. Zusammenfassende Bemerkungen	67
Anhang	69
Quellenverzeichnis	84

Einleitung

In der nichtrelativistischen Quantenmechanik wird die Bewegung zweier (spinloser) Teilchen unter ihrer gegenseitigen Wechselwirkung, die nur von der relativen Lage beider Teilchen abhängen möge, nach Abseparation der Massenschwerpunktbewegung durch die Relativbewegung der Teilchen oder, äquivalent dazu, durch die Bewegung eines Teilchens im Einfluß eines Potentials V mit Hilfe der unitären Gruppe e^{-itH} beschrieben. Dabei sind H und H_0 die selbstadjungierten Realisierungen der formalen Schrödinger – Operatoren des wechselwirkenden bzw. freien Teilchens:

$$H = H_0 + V(x), \quad H_0 = \frac{1}{2} |p|^2 = -\frac{1}{2} \Delta .$$

(Die reduzierte Masse μ und das Planck'sche Wirkungsquantum \hbar wurden gleich 1 gesetzt.)

Ist nämlich der Zustand eines Teilchens zum Zeitpunkt $t = 0$ durch $v_0 \in \mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben, so wird die zeitliche Entwicklung unter dem Einfluß des Potentials durch

$$v : t \mapsto e^{-itH} v_0$$

wiedergegeben. Ein Streuzustand $v(t) = e^{-itH} v_0$ sollte sich 'lange' bevor bzw. nachdem die Wechselwirkung stattfindet bzw. stattgefunden hat wie der Zustand eines freien Teilchens $u(t) = e^{-itH_0} u_0$ verhalten und jeder Zustand eines freien Teilchens sollte sich als möglicher Anfangs- bzw. Endzustand eines streuenden, wechselwirkenden Teilchens wiederfinden.

Letzteres Problem reduziert sich auf die Frage, ob zu jedem $u_{\pm} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ein $v \in \mathfrak{H}_{ac}(H) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ existiert, so daß

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \| e^{-itH} v - e^{-itH_0} u_{\pm} \| = 0$$

gilt oder, äquivalent dazu, ob die Existenz der Wellenoperatoren

$$W_{\pm} := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

mit $R(W_{\pm}) \subset \mathfrak{H}_{ac}(H)$ gesichert ist.

Kann man zusätzlich $R(W_+) = R(W_-) = \mathfrak{H}_{ac}(H)$ zeigen, so ist jeder Streuzustand des wechselwirkenden Teilchens asymptotisch (d. h. für $t \rightarrow -\infty$ bzw. $t \rightarrow \infty$) gleich dem eines freien Teilchens und wir nennen die Wellenoperatoren (asymptotisch) vollständig. In diesem Fall sind H_0 und die Einschränkung von H auf $\mathfrak{H}_{ac}(H)$ unitär äquivalent.

Um eine direkte Beziehung zwischen den asymptotischen Zuständen u_+ und u_- eines Streuzustands v zu bekommen, ist es sinnvoll, den Streuoperator S mit

$$S u_- := W_+^* W_- u_- = u_+$$

einzuführen, der unitär ist, sofern $R(W_+) = R(W_-)$ und isometrisch, sofern $R(W_+) \supset R(W_-)$ gilt.

Die Existenz der Wellenoperatoren wurde erstmals von Cook [3] für Potentiale, die wie $O(|x|^{-1-\delta})$, $\delta > 0$, im Unendlichen abfallen, gezeigt und später von verschiedenen Autoren auf eine größere Klasse verallgemeinert, während die Vollständigkeit zuerst von Kato [9] und Rosenblum [13] für Potentiale $V \in \mathfrak{B}_1(\mathfrak{H})$, der Spurklasse in $L^2(\mathbb{R}^n)$ etabliert wurde, einer Klasse, die im Fall $n = 3$ $L^1 \cap L^2$ umfasst.

Dollard [4] wies jedoch nach, daß für das Coulomb - Potential $V_C(x) = \gamma |x|^{-1}$ ($x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$), $\gamma \in \mathbb{R}$, die (gewöhnlichen) Wellenoperatoren nicht existieren und obige Theorie einer Modifizierung bedarf. Dazu führte er mit gewissen unitären Entwicklungsoperatoren e^{-iX_t} modifizierte Wellenoperatoren

$$W_{\pm}^{(D)} := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} e^{-iX_t}$$

ein, deren Existenz und Vollständigkeit er zeigte.

Dieses Resultat wurde von Buslaev/Matveev [2] und Alsholm [1] auf Potentiale V , die im Unendlichen schwächer als das Coulomb - Potential abfallen, verallgemeinert. Die von diesen Autoren verwendeten Modifizierungen der 'freien' Entwicklungsoperatoren e^{-itH_0} wurden dabei mit Hilfe von Funktionen X gewonnen, die man über ein Iterationsschema als angenäherte Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} X(p,t) = V(pt + \nabla_p X(p,t))$$

erhielt. Hörmander [6] verwendete schließlich exakte Lösungen dieser aus der klassischen Mechanik her bekannten partiellen Differentialgleichung zur Konstruktion modifizierter Wellenoperatoren, wobei er allgemeinere als die in den vorangegangenen Arbeiten untersuchten Schrödingeroperatoren zugrunde legte.

Aufbauend auf dieses Ergebnis, das ich im 1. Kapitel zusammen mit der grundlegenden Definition der von mir betrachteten Klasse von zulässigen Potentialen entwickeln werde, zeige ich die Existenz und die Invarianz der Wertebereiche aller bezüglich eines fest gewählten zulässigen Potentials verschieden-

artig modifizierten Wellenoperatoren, sofern die zur Modifizierung verwendeten Funktionen eine Näherungslösung der Hamilton–Jacobi Gleichung in einem noch näher zu präzisierenden Sinne darstellen.

Zur Herleitung dieser Aussage werde ich im 2. Kapitel ein Existenz- und Invarianzkriterium zur Verfügung stellen, das es mir darüberhinaus ermöglicht, unter Ausnutzung der im 3. Kapitel analysierten Eigenschaften iterierter Lösungen der Hamilton–Jacobi Gleichung, einen einfachen Existenzbeweis der von Alsholm et al. untersuchten modifizierten Wellenoperatoren zu erbringen.

Die zentralen Aussagen dieser Arbeit, die sich weniger hinsichtlich ihrer Resultate als bezüglich ihrer Beweismethoden unterscheiden, sind Gegenstand des 4. Kapitels. Die weitestgehenden Ergebnisse erziele ich dabei mit einer Methode, die auf Hörmander zurückgeht, während ich mit Hilfe iterierter Lösungen der Hamilton–Jacobi Gleichung zu einer in Bezug auf das Abfallverhalten des Potentials eingeschränkten Aussage gelange.

In einem abschließenden 5. Kapitel werden die gewonnenen Ergebnisse und ihre Konsequenzen in den Kontext der Streutheorie eingeordnet.

Für die Anregung zu diesem Thema und die fruchtbare Diskussion im Vorfeld der Entstehung dieser Arbeit danke ich Prof. Dr. Rainer Wüst.

1. Grundlegende Definitionen und Sätze

1.1 Bezeichnungen

Ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit nichtnegativen ganzzahligen Komponenten α_j nennen wir *Multiindex* und setzen

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad x^\alpha := \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$$

für jedes $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Für ein $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ schreiben wir abkürzend

$$D^\alpha f := \begin{cases} f & \text{für } |\alpha| = 0, \\ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} & \text{für } |\alpha| \geq 1. \end{cases}$$

Summationen der Form $\sum_{\kappa_0 \leq |\alpha| \leq \kappa_1} \dots$ bedeuten, daß über sämtliche Multiindizes α mit $\kappa_0 \leq |\alpha| \leq \kappa_1$ zu summieren ist.

Bezeichnet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \leq C_{\alpha, \beta} \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$ den *Schwartz-Raum der schnellfallenden Funktionen*, so ist \mathcal{S} offensichtlich eine Teilmenge des zugrunde gelegten *Hilbertraums* $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ *der quadratintegrierbaren, komplexwertigen Funktionen* auf \mathbb{R}^n . Andererseits umfaßt \mathcal{S} $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, den *Raum der unendlich oft differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger* in \mathbb{R}^n , so daß \mathcal{S} dicht in L^2 liegt.

Die *Fouriertransformation* \mathcal{F} , definiert durch

$$(\mathcal{F}f)(p) := \hat{f}(p) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, p \rangle} f(x) dx \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)),$$

ist eine lineare, stetige Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, die sich eindeutig zu einem unitären Operator in L^2 fortsetzen läßt. (Hierbei bezeichne $\langle x, p \rangle := \sum_{j=1}^n x_j p_j$ das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^n .)

Der Operator $-\frac{1}{2}\Delta := -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, definiert auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, besitzt eine selbstadjungierte Fortsetzung H_0

mit $D(H_0) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \|\cdot\|^2 \cdot \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ und $H_0 u := \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{|\cdot|^2}{2} \cdot \hat{u}\right)$ ($u \in D(H_0)$).

H_0 ist der Schrödingeroperator des freien (nichtrelativistischen) Teilchens und heißt der *freie* oder *ungestörte Hamiltonoperator*.

1.2 Kurzreichweitige Potentiale und gewöhnliche Wellenoperatoren

Um zu einem ersten Ergebnis über die Existenz von Wellenoperatoren zu gelangen, führen wir die folgende Klasse von Potentialen ein.

Definition 1.1:

Der maximale Multiplikationsoperator, definiert durch die meßbare Funktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, heißt *kurzreichweitiges Potential*, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} |V(x)|^2 (1 + |x|^2)^{-M} dx < \infty \quad (1.1)$$

gilt und für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so daß gilt:

$$\int_1^\infty \left(\int_{\Omega} |V(\pm tx)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt < \infty . \quad (1.2)$$

Bemerkung 1.2: Für kurzreichweitige Potentiale gilt $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \subset D(V) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid Vu \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$, denn für alle $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ergibt sich unter Anwendung von (1.1)

$$\|Vu\|_2^2 \leq \|(1 + |\cdot|^2)^M |u|^2\|_\infty \| |V|^2 (1 + |\cdot|^2)^{-M} \|_1 < \infty .$$

Der Operator $(H_0 + V) \upharpoonright \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ist somit wohldefiniert und in dem Fall, daß er wesentlich selbstadjungiert ist, heißt seine Abschließung der *totale* oder *gestörte Hamiltonoperator*.

Beispiel 1.3: Ist $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und gibt es $R > 0$ und $C > 0$, so daß für ein $\delta > 0$

$$|V(x)| \leq C |x|^{-1-\delta} \quad (|x| > R)$$

gilt, dann ist V ein kurzreichweitiges Potential, denn mit $M = \frac{n-2}{2}$ erfüllt V wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |V(x)|^2 (1 + |x|^2)^{-M} dx \leq C_0 + C_1 \int_R^\infty r^{-2-2\delta} r dr < \infty$$

die Bedingung (1.1) und für alle $a, b > 0$ gilt

$$\int_1^\infty \left(\int_{a < |x| < b} |V(tx)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 \int_{R/a}^\infty t^{-1-\delta} dt < \infty . \quad \square$$

Satz 1.4: (Existenz gewöhnlicher Wellenoperatoren)

Sei V ein kurzreichweitiges Potential, so daß $H_0 + V$, eingeschränkt auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, eine selbstadjungierte Fortsetzung H besitzt. Dann existieren

$$W_{\pm} u := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} u \quad (1.3)$$

für alle $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. W_{\pm} sind isometrische Operatoren mit $R(W_{\pm}) \subset \mathfrak{H}_{ac}(H)$ und erfüllen die ‘intertwining’ - Eigenschaft

$$e^{isH} W_{\pm} = W_{\pm} e^{isH_0} \quad (s \in \mathbb{R}) . \quad (1.4)$$

Beweis: siehe z.B. Hörmander [6], Theorem 2.3 oder Reed/Simon [12], Theorem XI.16. ■

Bemerkung 1.5: Die ‘intertwining’ - Eigenschaft (1.4) und die daraus resultierende, im Satz nicht vermerkte Unitäräquivalenz (mittels der Wellenoperatoren) von H_0 und der Einschränkung von H auf $R(W_{\pm})$, die wiederum $R(W_{\pm}) \subset \mathfrak{H}_{ac}(H)$ nach sich zieht, ergeben sich alleine aus der Existenz der starken Limites (1.3) und der Selbstadjungiertheit von H_0 und H . Die spezielle Struktur des Potentials ist bei der Herleitung dieser Eigenschaft der Wellenoperatoren ohne Bedeutung.

Beispiel 1.6: Sei $n \geq 3$ und $\delta > 0$. Ist $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ meßbare Funktion mit $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1-\delta}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist, wie in Beispiel 1.3 gezeigt wurde, V kurzreichweitig. Da $V \in L^{\infty}$ und damit $D(H_0) \subset D(V) = L^2(\mathbb{R}^n)$, sowie $\|Vu\|_2 \leq \|V\|_{\infty} \|u\|_2$ für alle $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt, ist V H_0 -beschränkt mit H_0 -Schranke 0 und dem Satz von Kato-Rellich zufolge ist $H = H_0 + V$ selbstadjungiert mit $D(H) = D(H_0)$. Der Satz 1.4 liefert in diesem Fall also die Existenz der (gewöhnlichen) Wellenoperatoren. □

1.3 Das Coulomb - Potential und die Notwendigkeit modifizierter Wellenoperatoren

Ein physikalisch relevanter Vertreter einer Klasse von nicht kurzreichweitigen Potentialen ist das Coulomb - Potential $V_C(x) := \gamma |x|^{-1}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Es entsteht nun die Frage, ob die Voraussetzungen des Satzes 1.4 zur Existenz der (gewöhnlichen) Wellenoperatoren derart abgeschwächt werden können, daß sie auch von V_C erfüllbar sind. Daß dies nicht der Fall ist, wurde bereits einleitend bemerkt und ist die Konsequenz einer Arbeit von Dollard, der Existenz und Vollständigkeit sogenannter ‘modifizierter’ Wellenoperatoren für das Coulomb - Potential zeigte.

Um zu präzisieren, was unter einem modifizierten Wellenoperator zu verstehen ist, zunächst die folgende

Definition 1.7:

Sei $X : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar. Bezeichnen e^{-iX_t} für alle $t \in \mathbb{R}$ die unitären Operatoren in $L^2(\mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$e^{-iX_t} u := \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-iX(\cdot, t)} \hat{u} \right),$$

und existieren für einen selbstadjungierten Operator H mit $D(H) \supset D(H_0)$

$$W_{\pm} u := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} e^{-iX_t} u \quad (1.5)$$

für alle $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so heißen W_{\pm} die *mit X modifizierten Wellenoperatoren*.

Bemerkung 1.8: Die unitären Operatoren e^{-iX_t} und e^{-itH_0} sind dem Spektralkalkül zufolge Funktionen von $-i\nabla_x$, so daß sie für alle $t \in \mathbb{R}$ vertauschen. Damit läßt sich (1.5) auch schreiben als

$$W_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0 - iX_t}.$$

Satz 1.9: (Dollard)

Seien $V_C(x) := \gamma |x|^{-1}$ ($x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$), $\gamma \in \mathbb{R}$ und

$$X^{(D)}(p, t) := \begin{cases} \gamma \operatorname{sign}(t) \frac{\log |t|}{|p|} & ; |t| \geq 1, p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ 0 & ; \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist H_C eine selbstadjungierte Fortsetzung von $H_0 + V_C$, eingeschränkt auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, so existieren die mit $X^{(D)}$ modifizierten Wellenoperatoren

$$W_{\pm}^{(D)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_C} e^{-itH_0 - iX_t^{(D)}}.$$

$W_{\pm}^{(D)}$ sind isometrische Operatoren mit $R(W_+^{(D)}) = R(W_-^{(D)}) = \mathfrak{H}_{ac}(H_C)$ und erfüllen

$$e^{isH_C} W_{\pm}^{(D)} = W_{\pm}^{(D)} e^{isH_0} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Beweis: siehe Dollard [4], Theorem 1 u. 2. ■

Bemerkung 1.10:

- i) Die Wahl von $X^{(D)}$ erscheint an dieser Stelle etwas abrupt, sie wird jedoch später im Rahmen allgemeiner Betrachtungen über die Bildung modifizierter Wellenoperatoren eine nachträgliche Motivation erfahren. In dem Zusammenhang sei auch auf den dort erbrachten einfachen Existenzbeweis verwiesen. (vgl. Beispiel 3.6)
- ii) Setzt man für ein $R > 0$ $V_1 := V_C \cdot \chi_R$, wobei χ_R die charakteristische Funktion auf $B_R(0)$ darstellen soll, und $V_2 := V_C - V_1$, so ist offensichtlich $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Nach einer Folgerung aus dem Satz von Kato-Rellich besitzt die Einschränkung von $H_0 + V_C$ auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ eine selbstadjungierte Fortsetzung H_C mit $D(H_C) = D(H_0)$.

Satz 1.11: (Nichtexistenz der gewöhnlichen Wellenoperatoren im Coulomb - Fall)

Seien H_0 und H_C wie in den Voraussetzungen zum Satz 1.9 gewählt. Dann existieren

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_C} e^{-itH_0} \quad \text{nicht.}$$

Zum Beweis des Satzes benötigen wir zwei Lemmata.

Lemma 1.12:

Sei X eine reellwertige, meßbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Existieren die mit X modifizierten Wellenoperatoren

$$W_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0 - iX_t}$$

für einen selbstadjungierten Operator H mit $D(H) \supset D(H_0)$, so ist

$$W_\pm^* = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iX_t} e^{itH_0} e^{-itH} P_\pm, \tag{1.6}$$

wobei P_\pm die orthogonalen Projektionen auf $R(W_\pm)$ bezeichnen.

Beweis: Seien $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt mit $P := P_+$, $W := W_+$ nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} | \langle (e^{iX_t} e^{itH_0} e^{-itH} P - W^*) u, v \rangle | &\leq | \langle u, P (e^{itH} e^{-itH_0 - iX_t} - W) v \rangle | \\ &\leq \|u\| \| (e^{itH} e^{-itH_0 - iX_t} - W) v \| \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Sei nun $u \in R(W)$, dann gibt es ein $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $u = Wv$, so daß

$$(W^*u, f) = (u, Wf) = (Wv, Wf) = (v, f)$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. $W^*u = v$ gilt. Somit folgt

$$\|W^*u\| = \|v\| = \|Wv\| = \|u\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{iX_t} e^{itH_0} e^{-itH} u\| \quad \text{für alle } u \in R(W).$$

(1.6) folgt nun aus der Tatsache, daß die schwache Konvergenz zusammen mit der Konvergenz der Normen die starke Konvergenz impliziert. (Für $t < 0$ verfährt man analog.) ■

Lemma 1.13:

Sei N eine abgeschlossene Nullmenge in \mathbb{R}^n . Dann ist

$$\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n \setminus N) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \hat{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus N)\} \quad \text{dicht in } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Beweis: Da die Fouriertransformation nach dem Satz von Plancherel eindeutig zu einem unitären Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden kann und $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, genügt es zu zeigen, daß $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus N)$ dicht ist in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gibt es nun, da N abgeschlossene Nullmenge ist, eine offene Umgebung U_j von N mit Lebesgue-Maß $\mu(U_j) < \frac{1}{j}$ und $\omega_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \omega_j(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\omega_j(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in N, \\ 1 & \text{für } x \notin U_j. \end{cases}$$

Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$, dann ist $\omega_j \cdot u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus N)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und es gibt ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j \geq j_0$ gilt

$$\begin{aligned} \|u - \omega_j \cdot u\|^2 &= \int_{U_j} |1 - \omega_j(x)|^2 |u(x)|^2 dx \\ &\leq \mu(U_j) \cdot \|u\|_\infty^2 \\ &\leq \epsilon^2. \end{aligned}$$

■

Beweis von Satz 1.11: (für $t > 0$)

Angenommen $W := W_+ = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itH} e^{-itH_0}$ existiere ($H := H_C$).

Dann definiert W einen isometrischen Operator mit $R(W) \subset \mathfrak{H}_{ac}(H)$ (s. hierzu Bemerkung 1.5).

Seien $P := P_+^{(D)}$ die Projektion auf $R(W_+^{(D)})$, $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $\epsilon > 0$. Wegen der Vollständigkeit von $W_+^{(D)}$ ist $R(W) \subset R(P) = \mathfrak{H}_{ac}(H)$ und auf Grund der Annahme gibt es ein $T > 0$, so daß für alle $t > T$

$$\begin{aligned} \|(I - P) e^{itH} e^{-itH_0} u\| &\leq \|(I - P) W u\| + \|(I - P) (e^{itH} e^{-itH_0} - W) u\| \\ &\leq \|(e^{itH} e^{-itH_0} - W) u\| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\text{w-lim}_{t \rightarrow \infty} (I - P) e^{itH} e^{-itH_0} = 0 \quad (1.7)$$

und es bliebe noch

$$\text{w-lim}_{t \rightarrow \infty} P e^{itH} e^{-itH_0} = 0 \quad (1.8)$$

zu zeigen, denn (1.7) und (1.8) liefern im Widerspruch zur Annahme

$$W = \text{s-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itH} e^{-itH_0} = \text{w-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{itH} e^{-itH_0} = 0.$$

Zum Nachweis von (1.8) seien $u, v \in L^2(\mathbb{R}^3)$ gewählt. Dann ist mit $X := X_+^{(D)}$ und $W^{(D)} := W_+^{(D)}$ (Bezeichnungen wie in Satz 1.9)

$$\begin{aligned} |(u, P e^{itH} e^{-itH_0} v)| &= |(Pu, e^{itH} e^{-itH_0} e^{-iX_t} e^{iX_t} v)| \\ &\leq \|(e^{iX_t} e^{itH_0} e^{-itH} P - W^{(D)*}) u\| \|e^{iX_t} v\| + |(W^{(D)} u, e^{iX_t} v)|. \end{aligned}$$

Nach Anwendung von Lemma 1.12 genügt es

$$\text{w-lim}_{t \rightarrow \infty} e^{-iX_t} = 0 \quad (1.9)$$

zu zeigen.

Dazu setzen wir

$$\phi(t) := \gamma \log(t) = |p| \cdot X(p,t) \quad (p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, t > 0), \quad (1.10)$$

$$\omega := \frac{p}{|p|} \text{ und } r := \frac{1}{|p|} \quad (p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Seien nun $u \in L^2$ und $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(u, e^{-iX_t} v \right) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-iX(p,t)} \bar{u}(p) \hat{v}(p) \, dp \\ &= \int_0^\infty e^{-i\phi(t) \cdot |p|^{-1}} \int_{|\omega|=1} \bar{u}(|p|\omega) \hat{v}(|p|\omega) \, d\omega \, |p|^2 \, d|p| \\ &= \int_0^\infty e^{-ir \cdot \phi(t)} w(r) \, dr, \end{aligned}$$

wobei mit

$$w(r) := \int_{|\omega|=1} \bar{u}\left(\frac{\omega}{r}\right) \hat{v}\left(\frac{\omega}{r}\right) r^{-4} \, d\omega \quad (r > 0)$$

wegen

$$\int_0^\infty w(r) \, dr = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{u}(p) \hat{v}(p) \, dp$$

$w \in L^1([0, \infty), dr)$ gilt. Bezeichnet \mathcal{F} die nach dem Riemann-Lebesgue Lemma eindeutige Fortsetzung der Fouriertransformation von $L^1(\mathbb{R})$ nach $C_\infty(\mathbb{R})$, dem Raum der im Unendlichen verschwindenden, stetigen Funktionen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \left(u, e^{-iX_t} v \right) \right| &\leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} |\mathcal{F}w(\phi(t))| \\ &\rightarrow 0 \quad (|\phi(t)| \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

was nach (1.10) für $t \rightarrow \infty$ der Fall ist.

Aus der Unitarität von e^{-iX_t} und Lemma 1.13 erhält man nun (1.9), womit die Annahme, die gewöhnlichen Wellenoperatoren existierten, zum Widerspruch geführt wurde. ■

1.4 Definition langreichweitiger und zulässiger Potentiale

Definition 1.14:

i) Sei $V_L \in C^\kappa(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für ein $\kappa \in \mathbb{N}$ und $\delta \in (0, 1)$. Der maximale Operator der Multiplikation mit V_L heißt *langreichweitiges C^κ -Potential mit Abfallexponent δ* , wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \kappa$ gilt:

$$|D^\alpha V_L(x)| \leq C (1 + |x|)^{-|\alpha|-\delta} \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (1.11)$$

ii) Der Operator V heißt *zulässiges Potential*, wenn V in die Summe zweier Potentiale V_S und V_L zerlegt werden kann, so daß V_S kurzreichweitig und V_L ein langreichweitiges C^κ -Potential mit Abfallexponent δ ist, wobei gilt:

$$\delta > \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } \kappa=1, \\ \frac{1}{5} & \text{für } \kappa=2, \\ 0 & \text{für } \kappa \geq 3. \end{cases}$$

Beispiel 1.15: Sei $V(x) := \gamma|x|^{-\delta}$ ($x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) mit $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, 1]$ und $n \geq 3$. Dann ist V ein zulässiges Potential, wie folgende Betrachtung zeigt.

Wählt man $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \omega(x) \leq 1$ und

$$\omega(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in B_1(0), \\ 1 & \text{für } x \notin B_2(0), \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und definiert $V_L := V \cdot \omega$ und $V_S := V - V_L$, so ist $V_L \in C^\infty$ und für alle $\kappa \in \mathbb{N}$ gibt es ein $C_\kappa > 0$, derart daß für alle $|\alpha| \leq \kappa$ gilt:

$$|D^\alpha V_L(x)| \leq C_\kappa (1 + |x|)^{-|\alpha|-\delta} \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

wobei im Fall $\delta = 1$ diese Abschätzung für jedes $\delta' \in (0, 1)$ an Stelle von δ erfüllt ist. Da $V_S \in L^2$, ist klar, daß V_S kurzreichweitig ist. \square

Bemerkung 1.16: Die Aufspaltung eines zulässigen Potentials in einen kurz- und langreichweitigen Anteil ist, wie obiges Beispiel verdeutlicht, keineswegs eindeutig. Im allgemeinen wird man versuchen, die Zerlegung so zu gestalten, daß der langreichweitige Anteil so glatt wie möglich, also etwa aus C^∞ gewählt werden kann.

1.5 Lösungen der Hamilton–Jacobi Gleichung und die Existenz modifizierter Wellenoperatoren

Wie wir in Satz 1.11 gesehen haben, existieren im Fall des Coulomb-Potentials, der als ein Grenzfall eines zulässigen Potentials mit echtem langreichweitigen Anteil angesehen werden kann, die gewöhnlichen Wellenoperatoren bereits nicht.

Ist V ein zulässiges Potential und H eine selbstadjungierte Fortsetzung des auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ eingeschränkten Operators $H_0 + V$ mit $D(H_0) \subset D(H)$, so ist nun zu untersuchen, unter welchen Bedingungen an eine geeignet zu wählende meßbare, reellwertige Funktion X , definiert auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die Existenz der mit X modifizierten Wellenoperatoren

$$W_{\pm} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0 - iX_t} \quad (1.12)$$

gewährleistet ist.

Durch Anwendung des Cauchyschen Konvergenzkriteriums auf $h_u(t) := e^{itH} e^{-itH_0 - iX_t} u$ läßt sich die Existenz der starken Limites in (1.12) nachweisen, indem man zeigt, daß es zu jedem $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ein $T_u > 0$ gibt, derart daß

$$\int_{T_u}^{\infty} \left(\left\| \frac{d}{dt} h_u(t) \right\| + \left\| \frac{d}{dt} h_u(-t) \right\| \right) dt < \infty \quad (1.13)$$

gilt, vorausgesetzt h_u ist stark differenzierbar.

Wegen der Unitarität der beteiligten Operatoren e^{itH} und $e^{-itH_0 - iX_t}$ genügt es, (1.13) für alle diejenigen u zu zeigen, die einer die Differenzierbarkeit von h_u ermöglichenden dichten Teilmenge von L^2 entnommen sind.

Betrachtet man $g_u(t) := e^{-itH_0 - iX_t} u$ auf der Lemma 1.13 zufolge in L^2 dicht liegenden Teilmenge $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \hat{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$, so ist $g_u(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \subset D(H_0) \subset D(H)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem ist, sofern $X \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, g_u differenzierbar auf \mathfrak{D} , denn

bezeichnet $\omega(p,t) := e^{-i\left(\frac{|p|^2}{2} \cdot t + X(p,t)\right)}$, so ist $\omega \in C^1$ und $\frac{1}{\tau}(\omega(p,t+\tau) - \omega(p,t))$ konvergiert punktweise gegen $\frac{\partial}{\partial t} \omega(p,t)$ für $\tau \rightarrow 0$. Somit folgt, da $\text{supp } \hat{u}$ kompakt ist,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} g_u(t) - \frac{g_u(t+\tau) - g_u(t)}{\tau} \right\|^2 &= \int_{\text{supp } \hat{u}} \left| \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}(p,t) - \frac{1}{\tau}(\omega(p,t+\tau) - \omega(p,t)) \right) \cdot \hat{u}(p) \right|^2 dp \\ &\leq C_0 \|\hat{u}\|^2 \end{aligned}$$

für alle $|\tau| < \tau_0$ mit einer Konstanten C_0 , die nur von $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathfrak{D}$ abhängt.

Mit dem Satz von Lebesgue ergibt sich daher $\frac{d}{dt} g_u(t) = -i\left(H_0 + \frac{\partial}{\partial t} X_t\right) g_u(t)$, was sinnvoll ist, da $g_u(t) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \subset D(H_0) \cap D\left(\frac{\partial}{\partial t} X_t\right)$.

Bezeichnet man mit $U(t) := e^{itH}$ die stark stetige, einparametrische unitäre Gruppe, erzeugt durch den selbstadjungierten Operator H , so ist $U(t)v$ für alle $v \in D(H)$ differenzierbar und $\frac{d}{dt}U(t)v = iU(t)Hv$. Somit ergibt sich die Differenzierbarkeit von h_u für alle $u \in \mathfrak{D}$ aus der Differenzierbarkeit von g_u und der bereits erwähnten Tatsache, daß $g_u(t) \in D(H)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, und es gilt:

$$\frac{d}{dt}h_u(t) = U(t) \left(iHg_u(t) + \frac{d}{dt}g_u(t) \right) = i e^{itH} \left(H - H_0 - \frac{\partial}{\partial t}X_t \right) g_u(t),$$

wie aus der nachstehenden Abschätzung ersichtlich wird:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d}{dt}h_u(t) - \frac{h_u(t+\tau) - h_u(t)}{\tau} \right\| \\ & \leq \left\| iU(t)Hg_u(t) - \frac{U(t+\tau) - U(t)}{\tau}g_u(t) \right\| + \left\| U(t+\tau) \left(\frac{g_u(t) - g_u(t+\tau)}{\tau} - \frac{d}{dt}g_u(t) \right) \right\| \\ & \quad + \left\| (U(t+\tau) - U(t)) \frac{d}{dt}g_u(t) \right\| \\ & \leq \left\| \left(\frac{d}{dt}U(t) - \frac{U(t+\tau) - U(t)}{\tau} \right) g_u(t) \right\| + \left\| \frac{d}{dt}g_u(t) - \frac{g_u(t+\tau) - g_u(t)}{\tau} \right\| \\ & \quad + \left\| (U(t+\tau) - U(t)) \frac{d}{dt}g_u(t) \right\| \\ & < \epsilon \end{aligned}$$

für alle $|\tau| < \tau_\epsilon$, wo $\tau_\epsilon > 0$ entsprechend einem vorgegebenen $\epsilon > 0$ hinreichend klein gewählt ist.

Hat man nun eine Zerlegung des zulässigen Potentials $V = V_S + V_L$ in einen kurzreichweitigen Anteil V_S und einen langreichweitigen Anteil V_L , so erhält man auf Grund der vorhergegangenen Untersuchungen

$$\left\| \frac{d}{dt}h_u(t) \right\| = \left\| (H - H_0 - \frac{\partial}{\partial t}X_t) g_u(t) \right\| \leq \|V_S g_u(t)\| + \left\| (V_L - \frac{\partial}{\partial t}X_t) g_u(t) \right\|. \quad (1.14)$$

Im Hinblick auf (1.13) läßt sich der erste Summand in (1.14) mit den gleichen Methoden wie in den Beweisen zur Existenz gewöhnlicher Wellenoperatoren abschätzen, während sich im zweiten Summanden

$$\left\| (V_L - \frac{\partial}{\partial t}X_t) g_u(t) \right\|^2 = \int_{\text{supp } \hat{u}} \left| (V_L(x) - \frac{\partial X}{\partial t}(p,t)) e^{i(\langle x,p \rangle - \frac{|p|^2}{2}t - X(p,t))} \hat{u}(p) \right|^2 dp,$$

mit den Methoden der stationären Phase behandelt, die wesentlichen Beiträge des Integrals mit oszillierender Amplitudenfunktion in den Punkten $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\nabla_p \left(\langle x, p \rangle - \frac{|p|^2}{2} t - X(p, t) \right) = 0,$$

d. h. für $x = pt + \nabla_p X(p, t)$ ergeben. (vgl. Hörmander[6] und Knabe[11])

Ziel aller Bemühungen wird es daher sein, $X \in C^1$ so zu wählen, daß die nachstehende nichtlineare partielle Differentialgleichung, die aus der klassischen Mechanik auch als Hamilton-Jacobi Gleichung bekannt ist, in dem Sinne erfüllt wird, daß

$$V_L \left(pt + \nabla_p X(p, t) \right) - \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) = 0 \quad (p \in K, |t| > T_K) \quad (1.15)$$

für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, wobei $T_K > 0$ in Abhängigkeit von K hinreichend groß gewählt werden kann. (In den vorangegangenen Betrachtungen müßte daher genaugenommen $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gewählt werden, so daß $\text{supp } \hat{u} \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.)

Bevor wir nun eine Aussage hinsichtlich der Existenz von ‘Lösungen’ der Hamilton-Jacobi Gleichung (1.15) treffen, wollen wir die Voraussetzungen an den langreichweitigen Anteil V_L , wie sie in Definition 1.14 formuliert wurden, leicht verschärfen.

Voraussetzung 1.17:

V_L ist eine reellwertige C^∞ - Abbildung auf \mathbb{R}^n , so daß es zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ positive Konstanten C_α gibt, derart daß

$$|D^\alpha V_L(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-m(|\alpha|)} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (1.16)$$

erfüllt ist. Hierbei ist $(m(j))_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine konkave Folge, definiert durch

$$m(j) := \begin{cases} \delta_0 + j & \text{für } 0 \leq j \leq \kappa_0, \\ \delta_0 + j - \frac{j - \kappa_0}{\kappa_0} & \text{für } j > \kappa_0, \end{cases}$$

mit $\kappa_0 \in \mathbb{N}$ und $\delta_0 \in (0, 1)$.

Die obige Voraussetzung ist nur eine scheinbare Restriktion der Klasse der zulässigen Potentiale, wie aus folgendem Lemma ersichtlich wird.

Lemma 1.18:

Sei V ein langreichweitiges C^κ -Potential mit Abfallerponent $\delta > 0$.

Dann gibt es eine Zerlegung $V = V_S + V_L$, so daß $V_L \in C^\infty$ der Voraussetzung 1.17 mit $\kappa_0 = \kappa$ und $\delta_0 = \delta$ genügt und der kurzreichweitige Anteil V_S für alle Multiindizes α mit $0 \leq |\alpha| \leq \kappa - 1$

$$|D^\alpha V_S(x)| \leq C_S (1 + |x|)^{-|\alpha| - \sigma(|\alpha|)} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (1.17)$$

mit einer Konstanten $C_S > 0$ und $\sigma(j) := \delta + \frac{\kappa - j}{\kappa}$ ($0 \leq j \leq \kappa - 1$) erfüllt.

Beweis: im Anhang unter Lemma A.5. ■

Satz 1.19:

V_L erfülle die Voraussetzung 1.17 mit $\kappa_0 \in \mathbb{N}$ und $\delta_0 \in (0, 1)$. Dann gibt es ein $X \in C^\infty((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $X(p, 0) = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und den folgenden Eigenschaften:

i) Zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt es ein $T_K > 0$, so daß

$$\frac{\partial X}{\partial t}(p, t) = V_L(pt + \nabla_p X(p, t)) \quad (1.18)$$

für alle $p \in K$ und $|t| > T_K$ erfüllt ist.

ii) Zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gibt es eine positive Konstante $C_{\alpha, K}$, so daß für alle $(p, t) \in K \times \mathbb{R}$

$$|D_p^\alpha X(p, t)| \leq C_{\alpha, K} (1 + |t|)^{1 - \delta_0 + \mu(|\alpha|)}, \quad (1.19)$$

$$|D_p^\alpha W(p, t)| \leq C_{\alpha, K} (1 + |t|)^{1 + \mu(|\alpha| - 1)} \quad (1.20)$$

gilt, wobei $W(p, t) := \frac{|p|^2}{2} t + X(p, t)$ und $\mu(j) := \max\{0, j+1 - m(j+1)\}$ ($j \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$).

(d. h. es gilt insbesondere $\mu(j) = 0$ für $j \leq \kappa_0$)

Beweis: siehe Hörmander [6], Theorem 3.8. ■

Die für diese Arbeit grundlegende Existenzaussage bezüglich modifizierter Wellenoperatoren wird in dem nachfolgenden Satz bereitgestellt und wurde erstmals mit Hilfe des Satzes 1.19 und den Methoden der stationären Phase in der bereits zitierten Arbeit von Hörmander bewiesen.

Satz 1.20: (Hörmander)

Sei $V = V_S + V_L$ ein zulässiges Potential mit der Eigenschaft, daß V_S kurzreichweitig ist, V_L die Voraussetzung 1.17 erfüllt und daß $H_0 + V$, eingeschränkt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, eine selbstadjungierte Fortsetzung H besitzt.

Erfüllt $X \in C^\infty((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Eigenschaften (1.18) - (1.20), wie in Satz 1.19 aufgeführt, dann existieren die mit X modifizierten Wellenoperatoren W_\pm und sie definieren isometrische Operatoren, die die ‘intertwining’ - Eigenschaft erfüllen und für die $R(W_\pm) \subset \mathfrak{H}_{ac}(H)$ gilt.

Beweis: s. Hörmander [6], Theorem 3.9 und Knabe [11]. ■

Beispiel 1.21: Wir betrachten das oszillierende Coulomb - Potential $V_{OC}(x) := \frac{\sin(|x|^\rho)}{|x|}$ ($x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$) mit einem $\rho \in (0, 1)$.

Mit einem $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, wie in Beispiel 1.15 gewählt, definieren wir $V_{OL} := V_{OC} \cdot \omega$ und erhalten $V_{OS} := V_{OC} - V_{OL} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, so daß V_{OS} kurzreichweitig ist.

Wir wollen nun zeigen, daß $V_{OL} \in C^\infty$ die Voraussetzung 1.17 erfüllt.

Mit Hilfe des Abschätzungslemmas für verkettete Funktionen Lemma A.3 gewinnt man aus

$$|D^\alpha(|x|^\rho)| \leq C_{|\alpha|} (1 + |x|)^{\rho - |\alpha|}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} |D^\gamma \sin(|x|^\rho)| &\leq \sum_{j=1}^{|\gamma|} C'_j \cdot \max \left\{ \prod_{i=1}^j C_{k_i} (1 + |x|)^{\rho - k_i} \mid \sum_{i=1}^j k_i = |\gamma| \right\} \\ &\leq \sum_{j=1}^{|\gamma|} C'_j \left(\prod_{i=1}^j C_{k_i} \right) (1 + |x|)^{j\rho - |\gamma|} \\ &\leq \bar{C}_{|\gamma|} (1 + |x|)^{|\gamma|(\rho - 1)} \end{aligned}$$

für alle $|x| \geq 1$, $|\gamma| \geq 1$ mit Konstanten $\bar{C}_{|\gamma|} > 0$.

Nach Anwendung der Produktabschätzung aus Lemma A.1 folgt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$

$$\begin{aligned} |D^\alpha \frac{\sin(|x|^\rho)}{|x|}| &\leq \hat{C}_{|\alpha|} \cdot \max_{|\gamma|+|\beta|=|\alpha|} (1 + |x|)^{-|\gamma|(1-\rho)-|\beta|-1} \\ &\leq \hat{C}_{|\alpha|} (1 + |x|)^{-|\alpha|(1-\rho)-1} \quad (|x| \geq 1), \end{aligned}$$

so daß

$$|D^\alpha V_{\text{OL}}(x)| \leq \tilde{C}_{|\alpha|} (1 + |x|)^{-\delta_{|\alpha|}} \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

gilt, wo $1 > 1-\rho =: \delta_0$ und $j(1-\rho) + 1 = j - (j-1)\rho + \delta_0 \geq 1 + \delta_0 =: \delta_j$ ($j \in \mathbb{N}$).

Somit erfüllt V_{OL} (1.16) mit $m(j) = \delta_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$, wobei $\kappa_0 = 1$ und $\delta_0 = 1-\rho$, d.h. für $\rho < \frac{1}{2}$ ist V_{OL} ein zulässiges Potential getreu der Definition 1.14.

Im Gegensatz etwa zum (klassischen) Coulomb - Potential haben wir es hier jedoch mit einem zulässigen Potential mit echtem langreichweitigen Anteil zu tun, für das auch, wie sich später herausstellen wird, die gewöhnlichen Wellenoperatoren existieren. \square

2. Existenz- und Invarianzkriterien

Die im vorausgegangenen Kapitel zuletzt zitierte Existenzaussage von Hörmander läßt den Einwand gerechtfertigt erscheinen, daß die modifizierten Wellenoperatoren zumindest in zweierlei Hinsicht von einer relativ willkürlichen Wahl der modifizierenden C^∞ - Funktion abhängen.

Zum einen ist nämlich, wie bereits bemerkt wurde, die Zerlegung eines zulässigen Potentials in einen kurzreichweitigen Anteil und einen langreichweitigen C^∞ - Anteil nicht eindeutig, was zur Folge hat, daß zu zwei verschiedenen Zerlegungen im allgemeinen auch unterschiedliche C^∞ - Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung (1.18) gemäß Satz 1.19 existieren.

Zum anderen garantiert Satz 1.19 nur die Existenz, nicht aber die Eindeutigkeit einer Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung zu einem fest vorgegebenen C^∞ - Potential, zumal die dort vorgegebene Anfangsbedingung eine willkürliche Festlegung darstellt, die ohne Einfluß auf die Asymptotik der Lösungen ist.

Darüberhinaus wird sich im Laufe späterer Untersuchungen zeigen, daß auch unter weniger restriktiven, als den in Satz 1.19 formulierten Bedingungen zur Modifizierung geeignete Funktionen bestimmt werden können, so daß die zugehörigen Wellenoperatoren existieren.

Es erscheint somit sinnvoll, Bedingungen herzuleiten, unter denen gewisse Eigenschaften modifizierter Wellenoperatoren im Hinblick auf die hier angesprochene Nichteindeutigkeit invariant bleiben.

Eine grundlegende, nicht nur physikalisch plausibel anmutende Invarianzgröße ist der Wertebereich eines Wellenoperators. So ergäbe sich beispielsweise als Konsequenz aus einer Invarianzaussage hinsichtlich der Wertebereiche zweier, bezüglich eines fest vorgegebenen Hamiltonoperators verschiedenartig modifizierter Wellenoperatoren, daß der Nachweis der Vollständigkeit des einen unmittelbar die Vollständigkeit des anderen Wellenoperators implizierte.

Der folgende Satz gibt nun Aufschluß darüber, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen an die modifizierenden Funktionen eine derartige Invarianzeigenschaft sichern.

2.1 Kriterien für die Invarianz der Wertebereiche verschiedenartig modifizierter Wellenoperatoren

Satz 2.1:

Seien X und \tilde{X} reellwertige, meßbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge.

i) Existieren die mit X und \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren

$$W_{\pm} = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{s\text{-lim}} e^{itH} e^{-itH_0 - iX_t} \quad (2.1)$$

und

$$\tilde{W}_{\pm} = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{s\text{-lim}} e^{itH} e^{-itH_0 - i\tilde{X}_t} \quad (2.2)$$

für einen selbstadjungierten Operator H mit $D(H) \supset D(H_0)$ und gilt

$$R(W_+) = R(\tilde{W}_+) \quad (2.3)$$

und

$$R(W_-) = R(\tilde{W}_-), \quad (2.3)$$

so gibt es meßbare Funktionen $F_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $|F_{\pm}| \stackrel{f.\ddot{u.}}{=} 1$ mit

$$\int_K |e^{i(X(p,t) - \tilde{X}(p,t))} - F_{\pm}(p)| dp \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (2.5)$$

für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$.

ii) Gibt es umgekehrt meßbare Funktionen $F_{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $|F_{\pm}| \stackrel{f.\ddot{u.}}{=} 1$, für die

$$\mu\left\{p \in K \mid |e^{i(X(p,t) - \tilde{X}(p,t))} - F_{\pm}(p)| \geq \sigma\right\} \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0 \quad (2.6)$$

für alle $\sigma > 0$ und $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus N$ erfüllt ist, so gilt:

Die mit X modifizierten Wellenoperatoren W_{\pm} existieren genau dann, wenn die mit \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren \tilde{W}_{\pm} existieren. In dem Fall, daß W_{\pm} oder \tilde{W}_{\pm} existieren, gibt es unitäre Operatoren U_{\pm} , definiert durch

$$U_{\pm} u := \mathfrak{F}^{-1}\left(F_{\pm}(\cdot) \hat{u}\right) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\lim} \mathfrak{F}^{-1}\left(e^{i(X(\cdot,t) - \tilde{X}(\cdot,t))} \hat{u}\right) \quad (u \in L^2), \quad (2.7)$$

so daß folgende Beziehung gilt:

$$\tilde{W}_{\pm} = W_{\pm} U_{\pm}. \quad (2.8)$$

Beweis: (für $t > 0$)

ad i): Bezeichne P die Projektion auf $R(W_+)$ und \tilde{P} die auf $R(\tilde{W}_+)$, so ist nach Voraussetzung (2.3) $P = \tilde{P}$. Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$, dann gilt mit $W := W_+$ und $\tilde{W} := \tilde{W}_+$ für alle $t > 0$

$$\begin{aligned} \|(W^* \tilde{W} - e^{i(X_t - \tilde{X}_t)}) u\| &\leq \|(W^* - e^{iX_t} e^{-itH}) \tilde{W} u\| + \|e^{iX_t} e^{-itH} (\tilde{W} - e^{itH} e^{-i\tilde{X}_t}) u\| \\ &\leq \|(W^* - e^{iX_t} e^{-itH} P) \tilde{W} u\| + \|(\tilde{W} - e^{itH} e^{-i\tilde{X}_t}) u\|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nun gibt es wegen (2.2) ein $\tilde{T}_\epsilon > 0$, so daß für alle $t > \tilde{T}_\epsilon$ der zweite Summand in (2.9) kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$ ist. (2.1) zusammen mit Lemma 1.12 liefert für $v := \tilde{W} u$ die Existenz eines $T_\epsilon > 0$, so daß für alle $t > T_\epsilon$ gilt:

$$\|(W^* - e^{iX_t} e^{-itH} P) v\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mit $v_u := \mathcal{F}(W^* \tilde{W} u)$ gibt es somit zu jedem $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ein $T_u := \max\{T_\epsilon, \tilde{T}_\epsilon\}$, derart daß für alle $t > T_u$ gilt:

$$\int_{\text{supp } \hat{u}} |e^{i(X(\cdot, t) - \tilde{X}(\cdot, t))} \hat{u}(p) - v_u(p)|^2 dp < \epsilon^2. \quad (2.10)$$

Ist $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_j \subset \dots$ eine Folge von meßbaren Mengen mit $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \mathbb{R}^n$ und $u_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \hat{u}_j \supset K_j$ und $\hat{u}_j(p) = 1$ für alle $p \in K_j$ ($j \in \mathbb{N}$), so gilt

$$\begin{aligned} \int_{K_j} |e^{i(X(\cdot, t) - \tilde{X}(\cdot, t))} - v_{u_j}(p)| dp &\leq \sqrt{\mu(K_j)} \cdot \left(\int_{\text{supp } \hat{u}_j} |e^{i(X(\cdot, t) - \tilde{X}(\cdot, t))} \hat{u}_j(p) - v_{u_j}(p)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (2.11)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, wobei (2.10) und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung benutzt wurden.

Aus (2.11) läßt sich jedoch ersehen, daß $v_{u_{j+1}}(p) = v_{u_j}(p)$ für fast alle $p \in K_j \subset K_{j+1}$ und somit

$$F(p) := \lim_{j \rightarrow \infty} v_{u_j}(p)$$

für fast alle $p \in \mathbb{R}^n$ existiert. F ist als f. ü. punktwieser Limes einer Folge meßbarer Funktionen meßbar und es gilt $|F(p)| = 1$ f. f. a. $p \in \mathbb{R}^n$. Da jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ in einem K_{j_0} für ein $j_0 \in \mathbb{N}$ enthalten ist, folgt demnach (2.5) aus (2.11).

ad ii): Sei $F := F_+$ eine meßbare Funktion mit $|F| = 1$ f. ü., für die (2.6) gilt. Wir zeigen zunächst, daß

$$\mathcal{F}^{-1}\left(F(\cdot) \cdot\right) = \underset{t \rightarrow \infty}{s\text{-lim}} e^{i(X_t - \tilde{X}_t)}$$

gilt, wobei die rechte Seite existiert und einen unitären Operator in $L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus N$, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\hat{u}(p)|^2 dp < \frac{\epsilon^2}{12}$$

gilt. Setzt man

$$K_{t,\epsilon} := \left\{ p \in K \mid \left| e^{i(X(p,t) - \tilde{X}(p,t))} - F(p) \right| < \frac{\epsilon}{\sqrt{3\|u\|}} \right\},$$

so existiert nach Voraussetzung (2.6) ein $T_\epsilon > 0$, so daß für alle $t > T_\epsilon$

$$\mu(K \setminus K_{t,\epsilon}) < \frac{\epsilon^2}{12\|u\|^2}$$

gilt. Damit ergibt sich für alle $t > T_\epsilon$

$$\begin{aligned} \left\| e^{i(X_t - \tilde{X}_t)} u - \mathcal{F}^{-1}\left(F(\cdot) \hat{u}\right) \right\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{i(X(p,t) - \tilde{X}(p,t))} - F(p) \right|^2 |\hat{u}(p)|^2 dp \\ &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\hat{u}(p)|^2 dp + \int_K \left| e^{i(X(p,t) - \tilde{X}(p,t))} - F(p) \right|^2 |\hat{u}(p)|^2 dp \\ &< \frac{\epsilon^2}{3} + 4 \int_{K \setminus K_{t,\epsilon}} |\hat{u}(p)|^2 dp + \int_{K_{t,\epsilon}} |\dots|^2 |\hat{u}(p)|^2 dp \\ &< \frac{2\epsilon^2}{3} + \frac{\epsilon^2}{3\|u\|^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(p)|^2 dp \\ &= \epsilon^2. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $|F| = 1$ f. ü. gilt, ist durch $U u := \mathcal{F}^{-1}\left(F(\cdot) \hat{u}\right)$, ($u \in L^2(\mathbb{R}^n)$) ein unitärer Operator definiert, für den (2.7) Gültigkeit besitzt.

Setzt man nun etwa die Existenz des mit X modifizierten Wellenoperators

$$W := W_+ = \underset{t \rightarrow \infty}{s\text{-lim}} e^{itH_e} e^{-itH_0} e^{-iX_t}$$

voraus, so erhält man für ein beliebiges $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
 \|WUu - e^{itH_e - itH_0 - i\tilde{X}_t} u\| &= \|WUu - e^{itH_e - itH_0 - iX_t} e^{i(X_t - \tilde{X}_t)} u\| \\
 &\leq \|WUu - e^{itH_e - itH_0 - iX_t} Uu\| + \|e^{itH_e - itH_0 - iX_t} (Uu - e^{i(X_t - \tilde{X}_t)} u)\| \\
 &\leq \|(W - e^{itH_e - itH_0 - iX_t}) Uu\| + \|(U - e^{i(X_t - \tilde{X}_t)}) u\| \\
 &< \epsilon
 \end{aligned}$$

für alle $t > \tilde{T}_\epsilon$, wobei $\tilde{T}_\epsilon > 0$ hinreichend groß gewählt ist, was nach der Voraussetzung an W und der oben gezeigten Eigenschaft von U möglich ist.

Setzt man umgekehrt voraus, daß der mit \tilde{X} modifizierte Wellenoperator $\tilde{W} := \tilde{W}_+$ existiert, so zeigt man ähnlich wie in Lemma 1.12, daß

$$U = \underset{t \rightarrow \infty}{s\text{-lim}} e^{i(X_t - \tilde{X}_t)} \Rightarrow U^* = \underset{t \rightarrow \infty}{s\text{-lim}} e^{i(\tilde{X}_t - X_t)}$$

gilt und analog der obigen Beweisführung ergibt sich dann

$$\tilde{W} U^* = \underset{t \rightarrow \infty}{s\text{-lim}} e^{itH_e - itH_0 - iX_t} \quad \blacksquare$$

Im Hinblick darauf, für die folgenden Untersuchungen ein praktikables hinreichendes Kriterium dafür zur Verfügung zu haben, daß sich sowohl die Existenz als auch die Vollständigkeit zweier verschiedenartig modifizierter Wellenoperatoren gegenseitig bedingen, leiten wir eine Folgerung aus Satz 2.1 ii) ab.

Korollar 2.2:

Seien $n \geq 2$, $N \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Nullmenge und X, \tilde{X} reellwertige, meßbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, so daß eine der beiden nachfolgenden Bedingungen erfüllt ist:

i) Es gibt zu jedem $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus N$ ein $g_\pm \in L^1(K)$ mit

$$\int_K |e^{i(X(p,t) - \tilde{X}(p,t))} - g_\pm(p)| dp \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0, \quad (2.12)$$

ii) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (X(p,t) - \tilde{X}(p,t))$ existiert für fast alle $p \in \mathbb{R}^n$. (2.13)

Dann existieren die mit X modifizierten Wellenoperatoren W_\pm genau dann, wenn die mit \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren \tilde{W}_\pm existieren, und in dem Fall, daß W_\pm oder \tilde{W}_\pm existieren, gibt es unitäre Operatoren U_\pm , so daß gilt:

$$\tilde{W}_\pm = W_\pm U_\pm.$$

Beweis: (für $t > 0$)

ad i):

Sei $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_j \subset \dots$ eine Folge von Kompakta, enthalten in $\mathbb{R}^n \setminus N$, so daß $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \supset \mathbb{R}^n \setminus N$.
 Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $g_j \in L^1(K_j)$, so daß mit $Y := X - \tilde{X}$

$$\int_{K_j} |e^{iY(p,t)} - g_j(p)| \, dp \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

gilt. Insbesondere ist damit $g_{j+1}(p) = g_j(p)$ für fast alle $p \in K_j \subset K_{j+1}$ ($j \in \mathbb{N}$) und somit existiert

$$G(p) := \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(p)$$

für fast alle $p \in \mathbb{R}^n$. G ist meßbar und es gilt $|G| = 1$ f. ü. .

Sei nun $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus N$ und $\sigma > 0$, dann ergibt sich mit der Bezeichnung $\phi_t(p) := |e^{iY(p,t)} - G(p)|$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$

$$\mu\{p \in K \mid \phi_t(p) \geq \sigma\} \leq \frac{1}{\sigma} \int_K \phi_t(p) \, dp, \quad (2.14)$$

denn mit $K_{\sigma,t} := \{p \in K \mid \phi_t(p) > \sigma\}$ ist

$$\begin{aligned} \int_K \phi_t(p) \, dp &= \int_{K_{\sigma,t}} \phi_t(p) \, dp + \int_{K \setminus K_{\sigma,t}} \phi_t(p) \, dp \\ &\geq \int_{K_{\sigma,t}} \phi_t(p) \, dp \\ &\geq \sigma \mu(K_{\sigma,t}). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite von (2.14) für $t \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, erfüllt G damit alle Voraussetzungen von Satz 2.1 ii).

ad ii):

Sei $K \subset \subset \mathbb{R}^n$ und $g(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} (X(p,t) - \tilde{X}(p,t))$ für f. a. $p \in K$. Dann ergibt sich für alle $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_K |e^{i(X(p,t) - \tilde{X}(p,t))} - e^{ig(p)}| \, dp &= \int_K |e^{i(X(p,t) - \tilde{X}(p,t) - g(p))} - 1| \, dp \\ &\leq 2 \mu(K). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Auf Grund der Voraussetzung (2.13) folgt mit dem Satz von Lebesgue, daß $e^{ig(p)} \in L^1(K)$ ist und das Integral in (2.15) für $t \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Zusammen mit Teil i) dieses Korollars impliziert das die Behauptung. ■

2.2 Gewöhnliche Wellenoperatoren im Kontext der modifizierten Theorie

Eine erste Konsequenz aus Korollar 2.2 können wir jetzt bereits für gewöhnliche Wellenoperatoren ziehen.

Satz 2.3:

Sei der maximale Operator der Multiplikation mit einer reellwertigen, meßbaren Funktion V auf \mathbb{R}^n derart gegeben, daß $D(V) \supset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ und $H_0 + V$, eingeschränkt auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, eine selbstadjungierte Fortsetzung H besitzt.

Ist X eine reellwertige, meßbare Funktion auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, für die

$$X_{\pm}(p) := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} X(p, t)$$

f. f. a. $p \in \mathbb{R}^n$ existieren, so existieren die mit X modifizierten Wellenoperatoren W_{\pm} genau dann, wenn die gewöhnlichen Wellenoperatoren

$$W_{\pm}^{(0)} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$$

existieren. In dem Fall, daß W_{\pm} oder $W_{\pm}^{(0)}$ existieren, gibt es unitäre Operatoren U_{\pm} , so daß

$$W_{\pm} = W_{\pm}^{(0)} U_{\pm} \quad \text{mit} \quad U_{\pm} u := \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-iX_{\pm}(\cdot)} \hat{u} \right) \quad (u \in L^2(\mathbb{R}^n))$$

erfüllt ist.

Beweis: Die Aussage geht unmittelbar aus Korollar 2.2 hervor, wenn in Betracht gezogen wird, daß nach der oben eingeführten Terminologie die gewöhnlichen Wellenoperatoren $W_{\pm}^{(0)}$ die mit $X^{(0)}(p, t) := 0$ modifizierten Wellenoperatoren darstellen. ■

Bemerkung 2.4:

Satz 2.3 in Verbindung mit Satz 1.4 ergibt insbesondere die Existenz mit X modifizierter Wellenoperatoren, sofern $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} X(p, t)$ f. f. a. $p \in \mathbb{R}^n$ existieren und V ein kurzreichweites Potential ist.

Wir werden später an Hand eines Beispiels sehen, daß der Satz 2.3 auch dazu geeignet ist, die Existenz gewöhnlicher Wellenoperatoren in dem Fall zu sichern, in dem die Methode von Cook versagt, die Existenz gewisser modifizierter Wellenoperatoren jedoch gezeigt werden kann.

2.3 Definition zeitabhängiger Modifikatoren und eine erste Existenz- und Invarianzaussage

Um die Ideen, die den Methoden dieser Arbeit zugrundeliegen, transparent zu machen und die Vorgehensweise zu motivieren, wollen wir die angestrebte Invarianzuntersuchung zunächst einmal exemplarisch an einem Spezialfall vollziehen.

Dazu geben wir uns ein zulässiges Potential vor, dessen langreichweitiger Anteil im Unendlichen hinreichend stark abfällt. Sei also $V = V_S + V_L$ zulässig, so daß $V_L \in C^\infty$ die Voraussetzung 1.17 mit einem positiven Abfallexponenten $\delta < 1$, den wir noch an späterer Stelle nach unten beschränken wollen, erfüllt.

Des weiteren seien X und \tilde{X} C^∞ -Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung gemäß Satz 1.19, was insbesondere bedeutet, daß es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $T_K, \tilde{T}_K > 0$ gibt, derart daß

$$\frac{\partial X}{\partial t}(p,t) = V_L(p,t + \nabla_p X(p,t)) \quad (p \in K, |t| > T_K), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}(p,t) = V_L(p,t + \nabla_p \tilde{X}(p,t)) \quad (p \in K, |t| > \tilde{T}_K) \quad (2.17)$$

gilt und zu jedem Multiindex α mit $|\alpha| \leq 1$ positive Konstanten $C_{\alpha,K}$ und $\tilde{C}_{\alpha,K}$ bestimmt werden können, so daß

$$|D_p^\alpha X(p,t)| \leq C_{\alpha,K} (1 + |t|)^{1-\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}), \quad (2.18)$$

$$|D_p^\alpha \tilde{X}(p,t)| \leq \tilde{C}_{\alpha,K} (1 + |t|)^{1-\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}). \quad (2.19)$$

Setzen wir zusätzlich voraus, daß V so beschaffen ist, daß die Einschränkung von $H_0 + V$ auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ eine selbstadjungierte Fortsetzung H mit $D(H) \supset D(H_0)$ besitzt, so folgt mit Satz 1.20, daß die mit X modifizierten Wellenoperatoren W_\pm , ebenso wie die mit \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren \tilde{W}_\pm existieren.

Setzt man $Y := X - \tilde{X}$, so genügt es nach Korollar 2.2 ii) zu zeigen, daß für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $Y(p,t)$ für $t \rightarrow \infty$ punktweise konvergiert, um zu folgern, daß es einen unitären Operator U_+ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $\tilde{W}_+ = W_+ U_+$.

Sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus N$, dann gibt es ein $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus N$ mit $p \in K$, so daß für alle $t' > t > T'_K := \max\{T_K, \tilde{T}_K\}$

$$\begin{aligned} & Y(p,t') - Y(p,t) \\ &= \int_t^{t'} \left(V_L(p,s + \nabla_p X(p,s)) - V_L(p,s + \nabla_p \tilde{X}(p,s)) \right) ds \\ &= \int_t^{t'} \int_0^1 \langle \nabla V_L(p,s + \tau \nabla_p X(p,s) + (1-\tau) \nabla_p \tilde{X}(p,s)), (\nabla_p X(p,s) - \nabla_p \tilde{X}(p,s)) \rangle d\tau ds \end{aligned} \quad (2.20)$$

gilt, wobei (2.16), (2.17) und der Fundamentalsatz (der Differential- u. Integralrechnung) benutzt wurden. Nach Voraussetzung an den langreichweitigen Anteil V_L ist

$$|\nabla V_L(x)| \leq C_1(1 + |x|)^{-1-\delta} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

mit $C_1 := \max_{|\alpha|=1} C_\alpha$, während mit $C_{1,K} := \max\left\{\max_{|\alpha|=1} C_{\alpha,K}, \max_{|\alpha|=1} \tilde{C}_{\alpha,K}\right\}$ für alle $\tau \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |ps + \tau \nabla_p X(p,s) + (1-\tau) \nabla_p \tilde{X}(p,s)| &\geq ||p|s - C_{1,K}(1+s)^{1-\delta}| \\ &\geq s \left| \inf_{p \in K} |p| - C_{1,K} \frac{(1+s)^{1-\delta}}{s} \right| \\ &\geq \frac{s}{2} \end{aligned} \tag{2.21}$$

gilt, sofern $s > T_K'' := \left(\frac{2 C_{1,K}}{\inf_{p \in K} |p|}\right)^{\frac{1}{\delta}}$.

Für $t' > t > T_K''' := \max\{T_K', T_K''\}$ läßt sich daher unter Anwendung von (2.20) abschätzen:

$$\begin{aligned} |Y(p,t') - Y(p,t)| &= 2^2 \cdot C_1 \int_t^{t'} s^{-1-\delta} |\nabla_p X(p,s) - \nabla_p \tilde{X}(p,s)| ds \\ &\leq 2^3 C_1 \cdot C_{1,K} \int_t^{t'} s^{-1-\delta} (1+s)^{1-\delta} ds \\ &\leq 2^4 C_1 \cdot C_{1,K} \int_t^{t'} s^{-2\delta} ds. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Hier zeigt sich nun mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, daß die Bedingung $\delta > \frac{1}{2}$ hinreichend für die Existenz von $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(p,t)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist.

Will man obige Abschätzung verbessern und etwa die Existenz der punktweisen Limites von $Y(p,t)$ für $t \rightarrow \infty$ auf den Fall $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ ausdehnen, so genügt es für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $s > T_p$

$$|\nabla_p Y(p,s)| = |\nabla_p X(p,s) - \nabla_p \tilde{X}(p,s)| \leq C_p s^{1-N\delta} \tag{2.23}$$

nachzuweisen, wobei $T_p > 1$, $C_p > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, daß $(N+1)\delta > 1$ gilt.

Bevor wir diese Strategie gegen Ende dieses Kapitels noch einmal aufgreifen wollen, nehmen wir jetzt in Verallgemeinerung der vorhergegangenen Betrachtung an, es gebe eine zweite Zerlegung des vorge-

gebenen zulässigen Potentials $V = \tilde{V}_S + \tilde{V}_L$, so daß $\tilde{V}_L \in C^\infty$ die Voraussetzung 1.17 mit Konstanten \tilde{C}_α statt C_α und Abfallexponenten $\tilde{\delta} \in (\frac{1}{2}, 1)$ erfüllt und daß

$$(\tilde{V}_S - V_S)(x) = O(|x|^{-1-\delta_S}) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

für ein $\delta_S > 0$ gilt.

Seien $X, \tilde{X} \in C^\infty((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, wo X wie oben und \tilde{X} so gewählt ist, daß (2.17) mit \tilde{V}_L an Stelle von V_L und (2.18) mit $\tilde{\delta}$ statt δ erfüllt ist.

Dann hat man für $p \in K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t' > t > T'_K$ (T'_K wie oben)

$$\begin{aligned} & |Y(p, t') - Y(p, t)| \\ &= \left| \int_t^{t'} \left(V_L(p_s + \nabla_p X(p, s)) - \tilde{V}_L(p_s + \nabla_p \tilde{X}(p, s)) \right) ds \right| \\ &\leq \left| \int_t^{t'} \left(V_L(p_s + \nabla_p X(p, s)) - V_L(p_s + \nabla_p \tilde{X}(p, s)) \right) ds \right| + \left| \int_t^{t'} (V_L - \tilde{V}_L)(p_s + \nabla_p \tilde{X}(p, s)) ds \right| \quad (2.24) \end{aligned}$$

und für ein beliebig vorgegebenes $\epsilon > 0$ läßt sich der erste Summand in (2.24), wie oben ausgeführt, mit einem genügend groß gewählten $T_{K, \epsilon} > 0$ für alle $t' > t > T_{K, \epsilon}$ durch $\frac{\epsilon}{2}$ nach oben beschränken, wenn man $\delta' := \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$ setzt und in Betracht zieht, daß $D^\alpha X$ und $D^\alpha \tilde{X}$ Abschätzungen der Form (2.18) bzw. (2.19) erfüllen, wo δ durch $\delta' > \frac{1}{2}$ ersetzt ist.

Beachtet man, daß $V_L - \tilde{V}_L = \tilde{V}_S - V_S$ und $|p_s + \nabla_p \tilde{X}(p, s)| \geq \frac{s}{2}$ für alle $s > \tilde{T}'_K := \left(\frac{2 C_{1, K}}{\inf_{p \in K} |p|} \right)^{\frac{1}{\delta'}}$, wie es sich aus (2.21) für $\tau = 0$ und mit δ' statt δ ableiten läßt,

so ergibt sich für alle $t' > t > \tilde{T}_{K, \epsilon}$ mit hinreichend großem $\tilde{T}_{K, \epsilon} > \tilde{T}'_K$

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t'} (V_L - \tilde{V}_L)(p_s + \nabla_p \tilde{X}(p, s)) ds \right| &\leq C_S \int_t^{t'} \left(\frac{s}{2} \right)^{-1-\delta_S} ds \\ &\leq C_S \frac{2^{1+\delta_S}}{\delta_S} \tilde{T}_{K, \epsilon}^{-\delta_S} \\ &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Somit läßt sich auch in diesem Fall Korollar 2.2 ii) zur Anwendung bringen und die mit X und \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren unterscheiden sich nur durch die Multiplikation eines unitären Operators.

In einer zweiten Stufe der Verallgemeinerung lockern wir die Voraussetzung sowohl an \tilde{V}_L , das wir jetzt gemäß der Definition 1.14 als ein langreichweitiges C^1 -Potential mit Abfallexponent $\tilde{\delta} \in (\frac{1}{2}, 1)$ vorgeben, als auch an \tilde{X} in dem Sinne, daß wir annehmen, \tilde{X} löse die Hamilton-Jacobi Gleichung nur noch

angenähert.

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$\tilde{R}(p,t) := \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}(p,t) - \tilde{V}_L(pt + \nabla_p \tilde{X}(p,t))$$

fordern wir an Stelle von (2.17)

$$|\tilde{R}(p,t)| \leq \tilde{C}_{R,K} |t|^{-1-\delta_r} \quad (p \in K, |t| > \tilde{T}_K > 1) \quad (2.17')$$

für ein $\delta_r > 0$ mit $\tilde{C}_{R,K} > 0$ und erhalten für $p \in K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t > t' > \max\{T_K, \tilde{T}_K\}$

$$\begin{aligned} |Y(p,t') - Y(p,t)| &= \left| \int_t^{t'} \left(V_L(ps + \nabla_p X(p,s)) - \tilde{V}_L(ps + \nabla_p \tilde{X}(p,s)) - \tilde{R}(p,s) \right) ds \right| \\ &\leq \left| \int_t^{t'} \left(V_L(ps + \nabla_p X(p,s)) - \tilde{V}_L(ps + \nabla_p \tilde{X}(p,s)) \right) ds \right| + \left| \int_t^{t'} \tilde{R}(p,s) ds \right|. \end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite der vorangegangenen Ungleichung läßt sich wie in den auf (2.24) folgenden Betrachtungen behandeln, während (2.17') zufolge $\tilde{R}(p, \cdot) \in L^1((\tilde{T}_K, \infty))$ für alle $p \in K$, so daß $Y(p,t)$ für $t \rightarrow \infty$ punktweise f. ü. konvergiert. Mit Korollar 2.2 ii) folgt so aus der Existenz des mit X modifizierten Wellenoperators W_+ die Existenz des mit \tilde{X} modifizierten Wellenoperators \tilde{W}_+ .

Bevor wir das bisher Bewiesene zusammenfassen, erscheint es nach obigen Ausführungen sinnvoll, folgenden Terminus zu vereinbaren:

Definition 2.5:

Ist V_L ein langreichweitiges C^κ -Potential mit Abfallexponent $\delta \in (0, 1)$ und $X \in C^\kappa((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, so heißt X (*zeitabhängiger*) C^κ -Modifikator bezüglich V_L , wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und zu jedem Multiindex α mit $|\alpha| \leq \kappa$ Konstanten $C_{\alpha,K} > 0$ gibt mit

$$|D_p^\alpha X(p,t)| \leq C_{\alpha,K} (1 + |t|)^{1-\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}), \quad (2.25)$$

sowie ein $T_K > 1$ existiert, so daß für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| \leq \kappa - 1$

$$|D_p^\beta R(p,t)| \leq C_{\beta,K} |t|^{-1-\delta_r} \quad (p \in K, |t| > T_K), \quad (2.26)$$

wobei $\delta_r > 0$ und $R(p,t) := \frac{\partial X}{\partial t}(p,t) - V_L(pt + \nabla_p X(p,t))$.

Satz 2.6:

Sei V zulässiges Potential mit der Eigenschaft, daß der Operator $H_0 + V$, eingeschränkt auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, eine selbstadjungierte Fortsetzung H mit $D(H) \supset D(H_0)$ besitzt. Gegeben seien weiterhin zwei Zerlegungen

$$V = V_S + V_L, \quad V = \tilde{V}_S + \tilde{V}_L,$$

derart daß die Differenz der kurzreichweitigen Anteile V_S und \tilde{V}_S

$$(\tilde{V}_S - V_S)(x) = O(|x|^{-1-\delta_S}) \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (2.27)$$

mit $\delta_S > 0$ genügt und die langreichweitigen C^κ -Potentiale V_L und \tilde{V}_L mit Abfallerponenten δ bzw. $\tilde{\delta} \in (\frac{1}{2}, 1)$ versehen sind.

Seien X, \tilde{X} zeitabhängige C^κ -Modifikatoren bzgl. V_L resp. \tilde{V}_L , dann existieren die mit X , sowie die mit \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren W_\pm und \tilde{W}_\pm , und es gibt unitäre Operatoren U_\pm in $L^2(\mathbb{R}^n)$, so daß die Relation

$$\tilde{W}_\pm = W_\pm U_\pm \quad (2.28)$$

besteht.

Beweis: (für $t > 0$)

Einen Spezialfall obiger Aussage, nämlich der Fall, daß $V_L \in C^\infty$ die Voraussetzung 1.17 erfüllt und $X \in C^\infty((\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ bezüglich dieses Potentials V_L Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung mit den Eigenschaften des Satzes 1.19 ist, wurde oben bereits bewiesen.

Die allgemeine Aussage des Satzes folgt nun mit einer Anwendung von Lemma 1.18, in dem behauptet wurde, daß sich jedes langreichweitige C^κ -Potential $V_L = \bar{V}_S + \bar{V}_L$ in einen langreichweitigen C^∞ -Anteil \bar{V}_L , der die Voraussetzung 1.17 mit $\delta_0 = \delta$ und $\kappa_0 = \kappa$ erfüllt, und einen kurzreichweitigen Anteil \bar{V}_S aufspalten läßt, so daß insbesondere

$$|\bar{V}_S(x)| \leq C_S (1 + |x|)^{-1-\bar{\delta}_S} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (2.29)$$

mit $C_S > 0$ und $\bar{\delta}_S > 0$ gilt.

Zu der Zerlegung $V = V_S + V_L$ gibt es demnach eine weitere Zerlegung $V = V_S + \bar{V}_S + \bar{V}_L$ und Satz 1.19 zufolge existiert ein $\bar{X} \in C^\infty$; so daß mit Satz 1.20 die Existenz des mit \bar{X} modifizierten Wellenoperators \bar{W}_+ gefolgert werden kann.

Da $((V_S + \bar{V}_S) - V_S)(x) = \bar{V}_S(x) = O(|x|^{-1-\bar{\delta}_S})$ ($|x| \rightarrow \infty$), ergibt sich aus dem oben bewiesenen Spezialfall, daß W_+ , der mit dem C^κ -Modifikator X modifizierte Wellenoperator, existiert und

$$W_+ = \bar{W}_+ \bar{U}_+ \quad (2.30)$$

mit einem unitären Operator \bar{U}_+ gilt.

Argumentiert man ebenso im Fall der Zerlegung $V = \tilde{V}_S + \tilde{V}_L$, so erhält man die Existenz des mit dem C^κ -Modifikator \tilde{X} modifizierten Wellenoperators \tilde{W}_+ über die Existenz eines mit $\tilde{X} \in C^\infty$ modifizierten Wellenoperators $\tilde{\tilde{W}}_+$, der die Beziehung

$$\tilde{\tilde{W}}_+ = \tilde{W}_+ \tilde{U}_+ \quad (2.31)$$

erfüllt, wobei \tilde{U}_+ ein unitärer Operator und \tilde{X} Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung bezüglich eines langreichweitigen C^∞ -Potentials \tilde{V}_L ist, das nach Lemma 1.18 Teil der Zerlegung $V = \tilde{V}_S + \tilde{V}_L = \tilde{\tilde{V}}_S + \tilde{\tilde{V}}_S + \tilde{\tilde{V}}_L$ ist.

Somit ist die Differenz der kurzreichweitigen Anteile der Zerlegungen

$$V = V_S + \bar{V}_S + \bar{V}_L, \quad V = \tilde{\tilde{V}}_S + \tilde{\tilde{V}}_S + \tilde{\tilde{V}}_L$$

von der Art, wie sie in obiger Beweisführung, auf die Abschätzung (2.24) folgend, benutzt wurde und es folgt die Existenz eines unitären Operators $\tilde{\tilde{U}}_+$, so daß

$$\tilde{\tilde{W}}_+ = \bar{W}_+ \tilde{\tilde{U}}_+$$

gilt. Setzt man $U_+ := \bar{U}_+^* \tilde{\tilde{U}}_+ \tilde{U}_+^*$, so ergibt sich schließlich mit (2.30) und (2.31)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_+ &= \tilde{\tilde{W}}_+ \tilde{U}_+^* = \bar{W}_+ \tilde{\tilde{U}}_+ \tilde{U}_+^* \\ &= W_+ \bar{U}_+^* \tilde{\tilde{U}}_+ \tilde{U}_+^* \\ &= W_+ U_+ . \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Bemerkung 2.7: Obiger Satz gilt auch im Fall Coulomb-artiger Potentiale $V = V_S + V_L$, wo V_S kurzreichweitig ist und $V_L(x) := \gamma|x|^{-1}$ ($x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$), $\gamma \in \mathbb{R}$, $n \geq 3$. In Beispiel 1.15 wurde gezeigt, daß V_L zulässig ist und es eine Zerlegung $V_L = \tilde{V}_S + \tilde{V}_L$ gibt, derart daß $\tilde{V}_S \in L^2$ ist und $\tilde{V}_L \in C^\infty$ für jedes $\kappa \in \mathbb{N}$ und jedes beliebige $\delta \in (0, 1)$

$$|D^\alpha \tilde{V}_L(x)| \leq C_\kappa (1 + |x|)^{-|\alpha|-\delta} \quad (|\alpha| \leq \kappa, x \in \mathbb{R}^n)$$

erfüllt. Wählt man also speziell $\delta > \frac{1}{2}$, so ist $V = (V_S + \tilde{V}_S) + \tilde{V}_L$ eine Zerlegung, die der Voraussetzung von Satz 2.6 genügt.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch kurz skizzieren, mit welchen Methoden die Aussage des Satzes 2.6 auf den Fall schwach abfallender langreichweitiger Potentiale, d. h. solcher Potentiale mit Abfallexponent $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ erweitert werden kann.

Mit Hilfe eines Iterationsschemas werden wir uns zunächst approximative Lösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung verschaffen und zeigen, daß diese Näherungslösungen nach Erreichen einer von δ abhängigen Iterationsstufe zeitabhängige Modifikatoren gemäß Definition 2.5 darstellen.

Darüberhinaus wird es uns gelingen, bezüglich eines weiteren, beliebigen zeitabhängigen Modifikators eine Abschätzung der Form (2.23) zu etablieren und damit unter Ausnutzung des Korollars 2.2 den Nachweis zu erbringen, daß sich sowohl Existenz als auch Vollständigkeit zweier in der Weise verschieden modifizierter Wellenoperatoren gegenseitig bedingen.

Eine Anwendung der Existenzaussage von Hörmander (Satz 1.20) wird schließlich, ähnlich wie im Beweis von Satz 2.6, die Existenz aller mit Hilfe von C^κ -Modifikatoren bezüglich eines langreichweitigen C^κ -Anteils gebildeten Wellenoperatoren liefern, sofern $\kappa \in \mathbb{N}$ hinreichend groß gewählt werden kann und zwar, grob gesprochen, umso größer, desto kleiner der Abfallexponent δ vorgegeben ist.

3. Iterierte Modifikationsterme

3.1 Definition und Eigenschaften

Ziel dieses Abschnitts ist es, durch einen Iterationsprozeß zu Näherungslösungen der Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial t}(p,t) = V(pt + \nabla_p X(p,t)) \quad ((p,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad (3.1)$$

zu gelangen. Dazu integrieren wir — vorausgesetzt, daß $V \in C^1$ ist — die nichtlineare, partielle Differentialgleichung (3.1) bezüglich t auf, was mit der (willkürlich) festgelegten Randbedingung $X(p,0) = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$

$$X(p,t) = \int_0^t V(ps + \nabla_p X(p,s)) ds \quad ((p,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad (3.2)$$

ergibt. Eine Picard-Iteration, angewandt auf die Integrodifferentialgleichung (3.2), führt zu folgender

Definition 3.1:

Sei V langreichweitiges C^κ - Potential mit Abfall exponent $\delta \in (\frac{1}{\kappa+1}, 1)$, so daß $\frac{1}{\delta} \notin \mathbb{N}$ und $N := [\frac{1}{\delta}]$ gilt.

i) Der j -fach iterierte Modifikationsterm (bezüglich V) $X^{(j)}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $j = 0, \dots, \kappa$ und alle $(p,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ durch folgendes Iterationsschema definiert:

$$X^{(j)}(p,t) := \begin{cases} 0 & ; j = 0 \\ \int_0^t V(ps + \nabla_p X^{(j-1)}(p,s)) ds & ; 1 \leq j \leq \kappa. \end{cases} \quad (3.3)$$

ii) Der spezielle j -fach iterierte Modifikationsterm (bezüglich V) $X_s^{(j)}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $j = 0, \dots, \kappa$ und alle $(p,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mittels folgendem Iterationsschema zu konstruieren:

$$\begin{aligned} X_s^{(0)}(p,t) &::= 0 \\ X^{(j)}(p,t) &::= \int_0^t V(ps + \nabla_p X^{(j-1)}(p,s)) ds + \frac{1+\text{sign}(t)}{2} S_+^{(j)}(p) + \frac{1-\text{sign}(t)}{2} S_-^{(j)}(p) \\ S_\pm^{(j)}(p) &::= \begin{cases} 0 & ; 1 \leq j \leq N \\ S_\pm^{(j-1)}(p) - \int_0^\pm R_s^{(j-1)}(p,s) ds & ; N < j < \kappa \end{cases} \\ R_s^{(j)}(p,t) &::= V(pt + \nabla_p X_s^{(j)}(p,t)) - V(pt + \nabla_p X_s^{(j-1)}(p,t)) \quad (j \geq 1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bemerkung 3.2:

- i) Die Wohldefiniertheit der iterierten Modifikationsterme wird in den folgenden Lemmata 3.3 und 3.4 nachgewiesen.
- ii) Die Voraussetzung $\frac{1}{\delta} \notin \mathbb{N}$ soll zur besseren Übersichtlichkeit vermeiden, daß in den Abschätzungen des t -Verhaltens der iterierten Modifikationsterme logarithmische Ausdrücke in t anfallen. Hat man ein langreichweitiges Potential V mit Abfallexponent $\delta \in (0, 1)$ gegeben, derart daß $\frac{1}{\delta} \in \mathbb{N}$, so wählt man ein hinreichend großes $\delta' \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}_+$ mit $\delta' < \delta$, und V erfüllt (1.11) mit δ' an Stelle von δ .
- iii) Da $\frac{1}{\delta} \notin \mathbb{N}$, ist $N < \frac{1}{\delta} < N+1$ und nach Voraussetzung ist $\delta > \frac{1}{\kappa+1}$, so daß $\kappa \geq N$ gilt.
- iv) Die speziellen stimmen mit den einfach iterierten Modifikationstermen bis einschließlich zur N -ten Iterationsstufe überein und es wird sich zeigen, daß die N -fach und — soweit es die Regularität des Potentials zuläßt — darüberhinaus iterierten Modifikationsterme zeitabhängige Modifikatoren gemäß Definition 2.5 darstellen. Eine später angestellte Untersuchung wird überdies erweisen, daß die speziellen iterierten Modifikationsterme so konstruiert sind, daß die mit Termen unterschiedlicher Iterationsstufe modifizierten Wellenoperatoren nicht nur gleiche Wertebereiche besitzen, sondern selbst identisch sind.

Lemma 3.3:

Der spezielle j -fach iterierte Modifikationsterm $X_s^{(j)}$ bezüglich eines langreichweitigen C^κ - Potentials V mit Abfallexponent δ ist für $j = 1, \dots, \kappa$ eine $(\kappa - j + 1)$ -mal stetig differenzierbare, reellwertige Abbildung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

Zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und allen Multiindizes α, β mit $|\alpha| + j - 1 \leq \kappa$ bzw. $|\beta| + j \leq \kappa$ gibt es Konstanten $C_{|\alpha|, K, j}, \bar{C}_{|\beta|, K, j} > 0$, so daß mit den Bezeichnungen des Iterationsschemas (3.4) für alle $(p, t) \in K \times \mathbb{R}$ gilt:

$$|D_p^\alpha X_s^{(j)}(p, t)| \leq C_{|\alpha|, K, j} (1 + |t|)^{1-\delta} \quad (3.5)$$

$$|D_p^\alpha (X_s^{(j)}(p, t) - X_s^{(j-1)}(p, t))| \leq C_{|\alpha|, K, j} (1 + |t|)^{1-j\delta} \quad (3.6)$$

$$|D^\alpha S_\pm^{(j)}(p)| \leq C_{|\alpha|, K, j} \quad (3.7)$$

$$|D_p^\beta R_s^{(j)}(p, t)| \leq \bar{C}_{|\beta|, K, j} (1 + |t|)^{-(j+1)\delta} \quad (3.8)$$

Beweis: (für $t > 0$)

Sei $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig gewählt. Im ersten Beweisschritt wird gezeigt, daß (3.5) zusammen mit (3.6) die Abschätzung (3.8) impliziert.

Dazu setzen wir zur Abkürzung für $1 \leq j \leq \kappa$, $p \in K$, $t > 0$ und $\tau \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h_j(p, t, \tau) &:= pt + \tau \nabla_p X_S^{(j)}(p, t) + (1-\tau) \nabla_p X_S^{(j-1)}(p, t) \\ B_j(p, t, \tau) &:= \nabla V(h_j(p, t, \tau)) \\ C_j(p, t) &:= \nabla_p X_S^{(j)}(p, t) - \nabla_p X_S^{(j-1)}(p, t) \end{aligned}$$

und registrieren, daß auf Grund der zunächst schon als bewiesen geltenden Behauptung, daß $X_S^{(j)} \in C^{\kappa-j+1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist, die Funktionen h_j , B_j und C_j bezüglich p und t $(\kappa-j)$ -mal stetig differenzierbar sind.

Mit Hilfe des Fundamentalsatzes (der Diff.- u. Integralrechnung) ergibt sich

$$R_S^{(j)}(p, t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} V(h_j(p, t, \tau)) \, d\tau = \int_0^1 \langle B_j(p, t, \tau), C_j(p, t) \rangle \, d\tau, \quad (3.9)$$

so daß $R_S^{(j)}(p, t) \in C^{\kappa-j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und zur Abschätzung des t -Verhaltens von $D^\beta R_S^{(j)}$ für $|\beta| \leq \kappa-j$ nach Lemma A.2 $D^\gamma B_j$ und $D^\sigma C_j$ für $|\gamma|, |\sigma| \leq \kappa-j$ zu kontrollieren sind.

Nach (3.6) ist für alle $(p, t) \in K \times \mathbb{R}_+$, $|\sigma| \leq \kappa-j$

$$|D_p^\sigma C_j(p, t)| \leq C_{|\sigma|+1, \kappa, j} (1 + |t|)^{1-j\delta} \quad (3.10)$$

und mit (3.5) und $\tilde{C}_{i, \kappa, j} := \max\{C_{i, \kappa, j}, C_{i, \kappa, j-1}\}$ ($1 \leq i \leq \kappa-j+1$) erhält man einerseits

$$\begin{aligned} |h_j(p, t, \tau)| &\geq t \left| \inf_{p \in K} |p| - (\tau C_{1, \kappa, j} + (1-\tau) C_{1, \kappa, j-1}) \frac{(1+t)^{1-\delta}}{t} \right| \\ &\geq t \left| \inf_{p \in K} |p| - \tilde{C}_{1, \kappa, j} (1+t)^{1-\delta} \right| \\ &\geq \frac{t}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

für alle $p \in K$, $t > T_{\kappa, j} := \left(\frac{2 \tilde{C}_{1, \kappa, j}}{\inf_{p \in K} |p|} \right)^{\frac{1}{\delta}}$, $\tau \in [0, 1]$.

Andererseits gilt für alle $p \in K$, $t \geq 1$ und $\tau \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |D_p^\rho h_j(p, t, \tau)| &\leq t + \tilde{C}_{2, \kappa, j} (1+t)^{1-\delta} \\ &\leq (1 + 2 \tilde{C}_{2, \kappa, j}) t \quad (|\rho| = 1), \end{aligned} \quad (3.12)$$

sowie

$$|D_p^\rho h_j(p,t,\tau)| \leq 2 \tilde{C}_{|\rho|+1,\kappa,j} t^{1-\delta} \quad (1 < |\rho| \leq \kappa-j). \quad (3.13)$$

Da nach Voraussetzung an das Potential

$$|D^\alpha V(x)| \leq C(1+|x|)^{-|\alpha|-\delta} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

gilt, ergibt sich nun mit Lemma A.4 für $1 \leq |\gamma| \leq \kappa-j$ unter Berücksichtigung von (3.11) – (3.13)

$$|D_p^\gamma B_j(p,t,\tau)| \leq \hat{C}_{|\gamma|,\kappa,j} t^{-1-\delta} \quad (p \in K, t > 1, \tau \in [0, 1]),$$

wobei die Konstanten $\hat{C}_{|\gamma|,\kappa,j} > 0$ von C und $\tilde{C}_{i,\kappa,j}$ ($1 \leq i \leq |\gamma|+1$) abhängen.

Ebenso ist

$$|B_j(p,t,\tau)| \leq \hat{C}_{0,\kappa,j} t^{-1-\delta} \quad (p \in K, t > 1, \tau \in [0, 1])$$

mit einer von C und $\tilde{C}_{1,\kappa,j}$ abhängigen Konstante $\hat{C}_{0,\kappa,j} > 0$, so daß insgesamt für $0 \leq |\gamma| \leq \kappa-j$

$$|D_p^\gamma B_j(p,t,\tau)| \leq C'_{|\gamma|,\kappa,j} (1+t)^{-1-\delta} \quad (3.14)$$

für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$ und $\tau \in [0, 1]$ gilt, wobei

$$C'_{|\gamma|,\kappa,j} := 2^{1+\delta} \max \left\{ \hat{C}_{|\gamma|,\kappa,j}, \sup_{|\alpha|=|\gamma|} \{|D_p^\alpha B_j(p,t,\tau)| \mid p \in K; t, \tau \in [0, 1]\} \right\}.$$

Somit läßt sich mit Hilfe von Lemma A.2 und den Abschätzungen (3.10) und (3.14)

$$|D_p^\beta R_s^{(j)}(p,t)| \leq \bar{C}_{|\beta|,\kappa,j} (1+t)^{-(j+1)\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+)$$

für alle Multiindizes β mit $0 \leq |\beta| \leq \kappa-j$ folgern, wobei

$$\bar{C}_{|\beta|,\kappa,j} := 2^{|\beta|} \max_{|\gamma|+|\sigma|=|\beta|} (C'_{|\gamma|,\kappa,j} \cdot C_{|\sigma|+1,\kappa,j}).$$

Im zweiten Beweisschritt werden nun die Aussagen (3.5) – (3.7) durch vollständige Induktion nach j gezeigt.

Wegen der Voraussetzung $\delta < 1$ ist $S_+^{(1)}(p,t) \equiv 0$ und somit (3.7) für $j = 1$ erfüllt. Durch eine Anwendung von Lemma A.4 bekommen wir, indem wir $g_1(p,t) := p \cdot t$ setzen und in Betracht ziehen, daß

V und g_1 κ -mal stetig differenzierbar sind, sowie $|g_1(p,t)| \geq \inf_{p \in K} |p| t$ und $|D_p^\beta g_1(p,t)| \leq \delta_{|\beta|,1} t$ für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$, $1 \leq |\beta| \leq \kappa$ gelten,

($\delta_{i,j}$ bezeichne das Kroneckersymbol)

$$\begin{aligned} |D_p^\alpha X_s^{(1)}(p,t)| &= |D_p^\alpha \int_0^t V(g_1(p,s)) ds| \\ &\leq \int_0^1 |D_p^\alpha V(g_1(p,s))| ds + \hat{C}_{|\alpha|,\kappa,1} \int_1^t s^{-\delta} ds \\ &\leq C_{|\alpha|,\kappa,1} (1+t)^{1-\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

wobei $C_{|\alpha|,\kappa,1} := \frac{2 \hat{C}_{|\alpha|,\kappa,1}}{1-\delta} + \sup_{|\beta|=|\alpha|} \{|D_p^\beta V(g_1(p,s))| \mid (p,s) \in K \times [0, 1]\}$ mit Konstanten $\hat{C}_{|\alpha|,\kappa,1}$,

die nur von $C > 0$, $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $|\alpha|$ abhängen.

Entsprechend ist

$$|X_s^{(1)}(p,t)| \leq C_{0,\kappa,1} (1+t)^{1-\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+),$$

mit einer von C und K abhängigen positiven Konstante $C_{0,\kappa,1}$, womit der Induktionsanfang für die Behauptung (3.5) und, da $X_s^{(0)}(p,t) \equiv 0$, auch für (3.6) bewiesen ist.

Im Induktionsschritt von j nach $j+1$ zeigen wir zunächst unter der Annahme, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j < \kappa$ $X_s^{(i)}$ und $S_+^{(i)}$ $(\kappa-i+1)$ -mal stetig differenzierbar sind, $X_s^{(j+1)} \in C^{\kappa-j}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $S_+^{(j+1)} \in C^{\kappa-j}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt.

Nach Definition ist mit $g_j(p,s) := ps + \nabla_p X_s^{(j)}(p,s)$

$$X_s^{(j+1)}(p,t) = \int_0^t V(g_j(p,s)) ds + S_+^{(j+1)}(p). \quad (3.15)$$

Die Tatsache, daß $V \in C^\kappa$ nach Voraussetzung und $g_j \in C^{\kappa-j}$ nach Induktionsannahme gelten, ergibt, daß der erste Summand in (3.15) $(\kappa-j)$ -mal stetig differenzierbar ist. Mit gleicher Argumentation läßt sich $R_s^{(j)} \in C^{\kappa-j}$ begründen, was wiederum $S_+^{(j+1)} \in C^{\kappa-j}$ nach sich zieht.

Angenommen, es gelte nun (3.5) – (3.7) für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq j < \kappa$. Für $j < N$, wobei $N = \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor$, ist $S_+^{(j+1)}(p) \equiv 0$ nach Definition und damit (3.7) trivialerweise erfüllt. Im Fall $j \geq N$ nutzen wir aus, daß, wie im ersten Beweisschritt gezeigt, auch (3.8) für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq j$ gültig ist und wegen

$$(j+1)\delta \geq (N+1)\delta > 1$$

gilt dann für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\alpha| \leq \kappa - j$

$$\begin{aligned} |D^\alpha S_+^{(j+1)}(p)| &= |D^\alpha S_+^{(j)}(p) - D_p^\alpha \int_0^\infty R_s^{(j)}(p,s) ds| \\ &\leq C_{|\alpha|,K,j} + \bar{C}_{|\alpha|,K,j} \int_0^\infty (1+s)^{-(j+1)\delta} ds \\ &\leq C_{|\alpha|,K,j+1}^{(1)} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+) \end{aligned} \quad (3.16)$$

mit $C_{|\alpha|,K,j+1}^{(1)} := C_{|\alpha|,K,j} + \frac{\bar{C}_{|\alpha|,K,j}}{(j+1)\delta - 1}$.

Mit Hilfe der unter der Induktionsannahme gültigen Abschätzungen (3.11) – (3.13) und der Tatsache, daß $g_j(p,t) = h_j(p,t,1)$ gilt, gewinnt man nach Anwendung von Lemma A.4 für $1 \leq |\alpha| \leq \kappa - j$

$$|D_p^\alpha V(g_j(p,t))| \leq C''_{|\alpha|,K,j+1} t^{-\delta} \quad (p \in K, t \geq 1)$$

mit einer von $C, C_{i,K,j} > 0$ ($1 \leq i \leq |\alpha|+1$) abhängigen positiven Konstante $C''_{|\alpha|,K,j+1}$. Da

$$|V(g_j(p,t))| \leq C''_{0,K,j+1} t^{-\delta} \quad (p \in K, t \geq 1)$$

gilt, wobei $C''_{0,K,j+1} > 0$ von $C, C_{1,K,j} > 0$ abhängig ist, folgt zusammen mit (3.16) für alle Multiindizes α , für die $0 \leq |\alpha| \leq \kappa - j$ erfüllt ist,

$$\begin{aligned} |D_p^\alpha X_s^{(j+1)}(p,t)| &\leq \int_0^t |D_p^\alpha V(g_j(p,s))| ds + |D_p^\alpha S_+^{(j+1)}(p)| \\ &\leq \int_0^1 |D_p^\alpha V(g_j(p,s))| ds + C''_{|\alpha|,K,j+1} \int_1^t s^{-\delta} ds + C_{|\alpha|,K,j+1}^{(1)} \\ &\leq C_{|\alpha|,K,j+1}^{(2)} (1+t)^{1-\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

mit $C_{|\alpha|,K,j+1}^{(2)} := \frac{2 C''_{|\alpha|,K,j+1}}{1-\delta} + C_{|\alpha|,K,j+1}^{(1)} + \sup_{|\beta|=|\alpha|} \{|D_p^\beta V(g_j(p,s))| \mid (p,s) \in K \times [0, 1]\}$.

Bleibt noch der Induktionsschritt für die Ungleichung (3.6) zu vollziehen. Dazu unterscheiden wir wieder die Fälle $j < N$ und $j \geq N$. Im ersten Fall erhalten wir für $0 \leq |\alpha| \leq \kappa - j$

$$\begin{aligned} |D_p^\alpha (X_s^{(j+1)}(p,t) - X_s^{(j)}(p,t))| &\leq \int_0^t |D_p^\alpha R_s^{(j)}(p,s)| ds \\ &\leq \frac{2 \bar{C}_{|\alpha|,K,j}}{1-(j+1)\delta} (1+t)^{1-(j+1)\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Ist $j \geq N$, so ergibt sich für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\alpha| \leq \kappa - j$

$$\begin{aligned} |D_p^\alpha (X_s^{(j+1)}(p,t) - X_s^{(j)}(p,t))| &\leq |D_p^\alpha \left(\int_0^t R_s^{(j)}(p,s) ds - \int_0^\infty R_s^{(j)}(p,s) ds \right)| \\ &\leq \int_t^\infty |D_p^\alpha R_s^{(j)}(p,s)| ds \\ &\leq \frac{\bar{C}_{|\alpha|,K,j}}{(j+1)^{\delta-1}} (1+t)^{1-(j+1)\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Mit $C_{|\alpha|,K,j+1}^{(3)} := \frac{2 \bar{C}_{|\alpha|,K,j}}{|1-(j+1)\delta|}$ und $C_{|\alpha|,K,j+1} := \max_{l=1,2,3} C_{|\alpha|,K,j+1}^{(l)}$ folgt somit die Behauptung. ■

Lemma 3.4:

Der j -fach iterierte Modifikationsterm $X^{(j)}$ bezüglich eines langreichweitigen C^κ -Potentials V mit Abfall exponent δ ist für $j = 1, \dots, \kappa$ eine $(\kappa - j + 1)$ -mal stetig differenzierbare, reellwertige Abbildung auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und allen Multiindizes α, β mit $|\alpha| + j - 1 \leq \kappa$ bzw. $|\beta| + j \leq \kappa$ Konstanten $C_{|\alpha|,K,j}, \bar{C}_{|\beta|,K,j} > 0$ gibt, so daß für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}$ gilt:

$$|D_p^\alpha X^{(j)}(p,t)| \leq C_{|\alpha|,K,j} (1+|t|)^{1-\delta} \quad (3.17)$$

$$|D_p^\alpha (X^{(j)}(p,t) - X^{(j-1)}(p,t))| \leq \begin{cases} C_{|\alpha|,K,j} (1+|t|)^{1-j\delta} & ; 1 \leq j \leq N \\ C_{|\alpha|,K,j} & ; N < j \leq \kappa \end{cases} \quad (3.18)$$

$$|D_p^\beta R^{(j)}(p,t)| \leq \begin{cases} \bar{C}_{|\beta|,K,j} (1+|t|)^{-(j+1)\delta} & ; 1 \leq j \leq N \\ \bar{C}_{|\beta|,K,j} (1+|t|)^{-1-\delta} & ; N < j \leq \kappa \end{cases} \quad (3.19)$$

mit $R^{(j)}(p,t) := V(pt + \nabla_p X^{(j)}(p,t)) - V(pt + \nabla_p X^{(j-1)}(p,t)) \quad (j \in \mathbb{N})$.

Beweis: Die Aussagen (3.17) - (3.19) für $j \leq N$ wurden bereits in Lemma 3.3 bewiesen. Analog zum dortigen Beweis zeigen wir zunächst wieder, daß für $j > N$ aus (3.17) und (3.18) die Abschätzung (3.19) folgt. Dazu setzen wir für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq \kappa$, $p \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $\tau \in [0, 1]$

$$B_j(p,t,\tau) := \nabla V(pt + \tau \nabla_p X^{(j)}(p,t) + (1-\tau) \nabla_p X^{(j-1)}(p,t))$$

$$C_j(p,t) := \nabla_p X^{(j)}(p,t) - \nabla_p X^{(j-1)}(p,t).$$

Sei nun $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig gewählt, dann ist für alle Multiindizes γ mit $0 \leq |\gamma| \leq \kappa - j$

$$|D_p^\gamma B_j(p, t, \tau)| \leq C'_{|\gamma|, \kappa, j} (1 + t)^{-1-\delta}$$

für alle $(p, t) \in K \times \mathbb{R}_+$ und $\tau \in [0, 1]$ mit positiven Konstanten $C'_{|\gamma|, \kappa, j}$, was ähnlich wie im Beweis zum Lemma 3.3 allein aus (3.17) und der Voraussetzung an V mit Hilfe des Lemmas A.4 gefolgert werden kann.

Da sich für $j > N$ aus (3.18) für alle $(p, t) \in K \times \mathbb{R}_+$ und Multiindizes σ mit $|\sigma| \leq \kappa - j$

$$|D_p^\sigma C_j(p, t)| \leq C_{|\sigma|+1, \kappa, j}$$

ergibt, liefert Lemma A.2

$$\begin{aligned} |D_p^\beta R^{(j)}(p, t)| &\leq |D_p^\beta \int_0^1 \langle B_j(p, t, \tau), C_j(p, t) \rangle d\tau| \\ &\leq \bar{C}_{|\beta|, \kappa, j} (1+t)^{-1-\delta} \quad ((p, t) \in K \times \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\beta| \leq \kappa - j$, wobei $\bar{C}_{|\beta|, \kappa, j} := 2^{|\beta|} \max_{|\gamma|+|\sigma|=|\beta|} (C'_{|\gamma|, \kappa, j} \cdot C_{|\sigma|+1, \kappa, j})$.

Die Aussagen (3.17) und (3.18) für $j \geq N+1$ zeigen wir nun durch vollständige Induktion.

Den Induktionsbeweis für (3.17) verankern wir bei $j = N$, so daß der Induktionsanfang unmittelbar aus Lemma 3.3, Eigenschaft (3.5), ersehen werden kann. Der Induktionsschritt unterscheidet sich von dem im Beweis von (3.5) vollzogenen nur insofern, als daß in den Abschätzungen für $D_p^\alpha X^{(j)}$ ein in t konstanter Term wegfällt.

Bleibt noch (3.18) für $j \geq N+1$ zu zeigen. Den Induktionsanfang für $j = N+1$ sieht man, wie folgt, ein:

$$\begin{aligned} |D_p^\alpha (X^{(N+1)}(p, t) - X^{(N)}(p, t))| &\leq \int_0^t |D_p^\alpha R^{(N)}(p, s)| ds \\ &\leq \bar{C}_{|\alpha|, \kappa, N} \int_0^t (1+s)^{-(N+1)\delta} ds \\ &\leq \frac{\bar{C}_{|\alpha|, \kappa, N}}{(N+1)\delta - 1} \quad ((p, t) \in K \times \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

für alle Multiindizes α mit $0 \leq |\alpha| \leq \kappa - N$.

Angenommen, (3.18) gelte für alle $i \leq j$ mit einem $j \geq N+1$, so folgt zusammen mit (3.17) für alle $i \leq j$ die Gültigkeit von (3.19) für dieses $j \in \mathbb{N}$, so daß für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\alpha| \leq \kappa - j$ gilt

$$\begin{aligned}
 |D_p^\alpha (X^{(j+1)}(p,t) - X^{(j)}(p,t))| &\leq \int_0^t |D_p^\alpha R^{(j)}(p,s)| ds \\
 &\leq \bar{C}_{|\alpha|,\kappa,j} \int_0^t (1+s)^{-1-\delta} ds \\
 &\leq \frac{\bar{C}_{|\alpha|,\kappa,j}}{\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+) .
 \end{aligned}$$

Der Beweis für $t < 0$ läuft vollkommen analog. ■

Bemerkung 3.5:

Die (speziellen) iterierten Modifikationsterme $X^{(j)}$ (bzw. $X_s^{(j)}$) bezüglich eines langreichweitigen C^κ -Potentials V sind für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $N \leq j \leq \kappa$ zeitabhängige $C^{\kappa-j+1}$ -Modifikatoren.

Es ist nämlich für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq \kappa$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} X^{(j)}(p,t) - V(pt + \nabla_p X^{(j)}(p,t)) &= V(pt + \nabla_p X^{(j-1)}(p,t)) - V(pt + \nabla_p X^{(j)}(p,t)) \\
 &= -R^{(j)}(p,t)
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} X_s^{(j)}(p,t) - V(pt + \nabla_p X_s^{(j)}(p,t)) = -R_s^{(j)}(p,t) ,$$

so daß (3.19) bzw. (3.8) für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $N \leq j \leq \kappa$ und alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| \leq \kappa - j$

$$\begin{aligned}
 |D_p^\beta R^{(j)}(p,t)| &\leq \bar{C}_{|\beta|,\kappa,j} (1+|t|)^{-1-\delta_j} \\
 &\leq \bar{C}_{|\beta|,\kappa,j} |t|^{-1-\delta_j} \quad (p \in K, |t| > 1)
 \end{aligned}$$

bzw.

$$|D_p^\beta R_s^{(j)}(p,t)| \leq \bar{C}_{|\beta|,\kappa,j} |t|^{-1-\tilde{\delta}_j} \quad (p \in K, |t| > 1)$$

liefert, wobei

$$\tilde{\delta}_j := (j+1)\delta - 1 > 0 \quad (N \leq j \leq \kappa)$$

und

$$\delta_j := \begin{cases} (N+1)\delta - 1 & ; j = N \\ \delta & ; N < j \leq \kappa \end{cases} .$$

3.2 Ein Existenzbeweis für die Dollard–Wellenoperatoren

Beispiel 3.6:

Um das bisher entwickelte Konzept zu illustrieren, betrachten wir noch einmal das Coulomb - Potential

$$V_C(x) = \gamma |x|^{-1} \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Wie in Beispiel 1.15 diskutiert, ist V_C zulässig und es gibt eine Zerlegung $V_C = V_{CS} + V_{CL}$, wobei V_{CS} kurzreichweitig ist und $V_{CL} \in C^\infty$ die Eigenschaft hat, daß $V_{CL}(x) = V_C(x)$ für alle $|x| \geq 2$ gilt und zu jedem $\kappa \in \mathbb{N}$ ein $C_\kappa > 0$ existiert, so daß für alle $|\alpha| \leq \kappa$ und $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned} |D^\alpha V_{CL}(x)| &\leq C_\kappa (1 + |x|)^{-|\alpha|-1} \\ &\leq C_\kappa (1 + |x|)^{-|\alpha|-\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Dem Satz 2.6 zufolge existieren die mit jedem C^κ -Modifikator bzgl. V_{CL} modifizierten Wellenoperatoren für alle $\kappa \in \mathbb{N}$. Da die j -fach iterierten Modifikationsterme $X_C^{(j)}$ bzgl. V_{CL} für $j \geq [\frac{4}{3}] = 1$ $C^{\kappa-j+1}$ -Modifikatoren (bzgl. V_{CL}) bilden, existieren insbesondere die mit $X_C^{(1)}$ modifizierten Wellenoperatoren $W_\pm^{(C)}$, wobei

$$X_C^{(1)}(p,t) := \int_0^t V_{CL}(ps) \, ds \quad ((p,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$$

gilt. Für alle $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $t \geq \frac{2}{|p|}$ ist

$$\begin{aligned} X_C^{(1)}(p,t) &= \int_0^{2/|p|} V_{CL}(ps) \, ds + \frac{\gamma}{|p|} \int_{2/|p|}^t \frac{1}{s} \, ds \\ &= \varphi(p) + \frac{\gamma}{|p|} \log t, \end{aligned}$$

wobei $\varphi(p) := \int_0^{2/|p|} V_{CL}(ps) \, ds - \frac{\gamma}{|p|} \log \left(\frac{2}{|p|} \right)$ ($|p| \neq 0$).

Vergleicht man $X_C^{(1)}$ mit der in Satz 1.9 eingeführten Modifizierung $X^{(D)}$, so erhält man

$$X_C^{(1)}(p,t) - X^{(D)}(p,t) = \varphi(p) \quad (|p| \neq 0, t \geq \max\{1, \frac{2}{|p|}\}).$$

Mit Hilfe des Korollars 2.2 folgert man so die Existenz von $W_+^{(D)}$ aus der Existenz von $W_+^{(C)}$. (Entsprechendes gilt für $W_-^{(D)}$.)

Die ursprünglich von Dollard verwendete Modifikation (vgl. Dollard [4]) wurde durch Iteration an dem ‘Potential’ $\tilde{V}_{\text{CL}}(pt) := \gamma|pt|^{-1} \theta(2|p|^2|t| - 1)$, ($|p| \neq 0, t \in \mathbb{R}$) gewonnen:

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(\text{D})}(p,t) &= \int_0^t \tilde{V}_{\text{CL}}(ps) \, ds \\ &= \frac{\gamma}{|p|} \text{sign}(t) \left(\log|t| + \log(2|p|^2) \right) \quad (|p| \neq 0, |t| > \frac{1}{2|p|^2}), \end{aligned}$$

wohingegen

$$\begin{aligned} X^{(\text{D})}(p,t) &= \int_1^t V_{\text{C}}(ps) \, ds \\ &= \frac{\gamma}{|p|} \text{sign}(t) \log|t| \quad (|p| \neq 0, |t| > 1). \end{aligned}$$

Da sich $X^{(\text{D})}$ und $\tilde{X}^{(\text{D})}$ wiederum nur durch einen in t konstanten Term unterscheiden, existieren auch die mit $\tilde{X}^{(\text{D})}$ modifizierten Wellenoperatoren $\tilde{W}_{\pm}^{(\text{D})}$. \square

3.3 Zwei Lemmata zur Vorbereitung einer allgemeinen Existenz- und Invarianzaussage

Zur Vorbereitung einer adäquaten Version des Satzes 2.6 für zulässige Potentiale mit schwach abfallendem langreichweitigen Anteil benötigen wir noch eine Aussage hinsichtlich des zeitlichen Verhaltens der Differenz eines zeitabhängigen Modifikators und iterierter Modifikationsterme bezüglich ein und desselben langreichweitigen Potentials.

Lemma 3.7:

Sei V langreichweitiges C^{κ} -Potential mit Abfall exponent $\delta \in (\frac{1}{\kappa+1}, 1)$, so daß $\frac{1}{\delta} \notin \mathbb{N}$ und $N := [\frac{1}{\delta}]$ gilt. Ist X ein (zeitabhängiger) C^{κ} -Modifikator und $X^{(j)}$ der j -fach iterierte Modifikationsterm (bzgl. V) für ein $j = 0, \dots, N-1$, so gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und allen Multiindizes α, β mit $|\alpha| + j \leq \kappa$ bzw. $|\beta| + j \leq \kappa - 1$ Konstanten $C_{|\alpha|,K,j}, \bar{C}_{|\beta|,K,j} > 0$, so daß für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}$ gilt:

$$|D_p^{\alpha} (X(p,t) - X^{(j)}(p,t))| \leq C_{|\alpha|,K,j} (1 + |t|)^{1-(j+1)\delta} \quad (3.20)$$

$$|D_p^{\beta} R_X^{(j)}(p,t)| \leq \bar{C}_{|\beta|,K,j} (1 + |t|)^{-(j+2)\delta}, \quad (3.21)$$

wobei $R_X^{(j)}(p,t) := V(pt + \nabla_p X(p,t)) - V(pt + \nabla_p X^{(j)}(p,t))$ ($j \in \mathbb{N}_0$).

Beweis: Das Vorgehen ist wieder analog dem des Beweises von Lemma 3.3 . Bevor wir (3.20) durch vollständige Induktion nach j zeigen, folgern wir (3.21) aus (3.20). Mit den Abkürzungen

$$B_j(p,t,\tau) := \nabla V(pt + \tau \nabla_p X(p,t) + (1-\tau) \nabla_p X^{(j)}(p,t))$$

$$C_j(p,t) := \nabla_p X(p,t) - \nabla_p X^{(j)}(p,t)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j < N$, $p \in K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t > 0$ und $\tau \in [0, 1]$ ergibt sich ähnlich wie im Beweis zu Lemma 3.3 durch Anwendung von Lemma A.4 aus (2.25), sowie (3.17) und der Voraussetzung an V für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| \leq \kappa - j - 1$

$$|D_p^\gamma B_j(p,t,\tau)| \leq C'_{|\gamma|, \kappa, j} (1+t)^{-1-\delta}$$

für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$ und $\tau \in [0, 1]$. Wegen

$$|D_p^\sigma C_j(p,t)| \leq C_{|\sigma|+1, \kappa, j} (1+t)^{1-(j+1)\delta}$$

für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$ und Multiindizes σ mit $|\sigma| \leq \kappa - j - 1$ folgt weiter mit Lemma A.2

$$|D_p^\beta R_X^{(j)}(p,t)| \leq |D_p^\beta \int_0^1 \langle B_j(p,t,\tau), C_j(p,t) \rangle d\tau|$$

$$\leq \bar{C}_{|\beta|, \kappa, j} (1+t)^{-(j+2)\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+)$$

für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\beta| \leq \kappa - j - 1$, wobei $\bar{C}_{|\beta|, \kappa, j} := 2^{|\beta|} \max_{|\gamma|+|\sigma|=|\beta|} (C'_{|\gamma|, \kappa, j} \cdot C_{|\sigma|+1, \kappa, j})$.

Abschließend zeigen wir (3.20) durch vollständige Induktion nach j :

$j = 0$: Da $X^{(0)}(p,t) \equiv 0$ ist, erhält man (3.20) für $j = 0$ und alle $|\alpha| \leq \kappa$ aus der Voraussetzung (2.25)

$$|D_p^\alpha X(p,t)| \leq C_{\alpha, \kappa} (1+t)^{1-\delta}$$

$$\leq C_{|\alpha|, \kappa, 0} (1+t)^{1-\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+),$$

wobei $C_{|\alpha|, \kappa, 0} := \sup_{|\gamma|=|\alpha|} C_{\gamma, \kappa}$.

$j \rightarrow j+1$: Sei (3.20) für den j -fach iterierten Modifikationsterm $X^{(j)}$ mit $j < N-1$ erfüllt. Da X ein C^κ -Modifikator ist, gilt mit

$$R(p,t) := \frac{\partial X}{\partial t}(p,t) - V(pt + \nabla_p X(p,t))$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \kappa-1$, $D_p^\alpha R \in C^{\kappa-|\alpha|-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $D_p^\alpha R(p, \cdot) \in L^1((T_K, \infty))$ für alle $p \in K$ mit $T_K > 1$, so daß

$$D_p^\alpha R(p, \cdot) \in L^1((0, \infty)) \quad (p \in K, |\alpha| \leq \kappa-1)$$

gilt. Somit ergibt sich für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq \kappa-j-1$ aus der Tatsache, daß $1-(j+2)\delta > 0$ für alle $j < N-1$ gilt,

$$\begin{aligned} |D_p^\alpha (X(p,t) - X^{(j+1)}(p,t))| &\leq \int_0^t |D_p^\alpha R_X^{(j)}(p,s)| ds + |D_p^\alpha X(p,0)| + \int_0^t |D_p^\alpha R(p,s)| ds \\ &\leq \bar{C}_{|\alpha|,K,j} \int_0^t (1+s)^{-(j+2)\delta} ds + \tilde{C}_{\alpha,K} \\ &\leq C_{|\alpha|,K,j+1} (1+t)^{1-(j+2)\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

wobei $C_{|\alpha|,K,j+1} := \frac{2\bar{C}_{|\alpha|,K,j}}{1-(j+2)\delta} + \tilde{C}_{|\alpha|,K}$ und $\tilde{C}_{|\alpha|,K} := \sup_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ p \in K}} (|D_p^\beta X(p,0)| + \int_0^\infty |D_p^\beta R(p,s)| ds)$.

■

Mit den nunmehr bereitgestellten Mitteln ist es möglich, die Existenz der modifizierten Wellenoperatoren zu zeigen, die mit κ -fach iterierten Modifikationstermen bezüglich eines solchen C^∞ -Potentials gebildet werden, das mit einem Abfallexponent $\delta \in (\frac{1}{\kappa+1}, 1)$ den Voraussetzungen 1.17 genügt.

Da wir jedoch auch an einem nur $[\frac{1}{\delta}]$ -mal stetig differenzierbaren, langreichweitigen Potential V iterieren wollen, stellen wir noch ein Ergebnis bereit, das im Hinblick auf eine Zerlegung $V = V_S + V_L$ gemäß Lemma 1.18 das Verhältnis der bezüglich V und V_L iterierten Modifikationsterme beschreibt.

Lemma 3.8:

Seien V, \tilde{V} langreichweitige C^κ -Potentiale mit Abfallerponenten $\delta, \tilde{\delta} \in (\frac{1}{\kappa+1}, 1)$, so daß $\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\tilde{\delta}} \notin \mathbb{N}$, $\delta \leq \tilde{\delta}$ und für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq N-1$, $N := \lfloor \frac{1}{\tilde{\delta}} \rfloor$, gilt:

$$|D^\alpha (V - \tilde{V})(x)| \leq \bar{C} (1 + |x|)^{-1|\alpha| - \sigma(|\alpha|)} \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad (3.22)$$

wobei $\bar{C} > 0$ und $\sigma(i) := \delta + \frac{N-i}{N}$ ($i = 0, \dots, N-1$).

Sind $X^{(j)}$ und $\tilde{X}^{(j)}$ die bezüglich V bzw. \tilde{V} j -fach iterierten Modifikationsterme für ein $j = 1, \dots, N-1$, so gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und allen Multiindizes β, γ mit $1 \leq |\beta| \leq N-j$ bzw. $0 \leq |\gamma| \leq N-j-1$ Konstanten $C_{|\beta|, K, j}, \bar{C}_{|\gamma|, K, j} > 0$, so daß für alle $(p, t) \in K \times \mathbb{R}$ gilt:

$$|D_p^\beta (X^{(j)}(p, t) - \tilde{X}^{(j)}(p, t))| \leq C_{|\beta|, K, j} (1 + |t|)^{1-b_j(|\beta|)}, \quad (3.23)$$

wobei $b_j(i) := \sigma(i+j-1) + (j-1)\delta < 1$ ($1 \leq i \leq N-j$),

$$|D_p^\gamma \tilde{R}^{(j)}(p, t)| \leq \bar{C}_{|\gamma|, K, j} (1 + |t|)^{-\sigma(|\gamma|+j)-j\delta}, \quad (3.24)$$

wobei $\tilde{R}^{(j)}(p, t) := V(pt + \nabla_p X^{(j)}(p, t)) - \tilde{V}(pt + \nabla_p \tilde{X}^{(j)}(p, t))$ ($j \in \mathbb{N}$).

Beweis: Das Beweisschema ist wieder das gleiche wie in den vorangegangenen Lemmata, so daß wir uns darauf beschränken, die wesentlich verschiedenen Schritte im Detail auszuführen.

Wir folgern zunächst (3.24) aus (3.23). Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} B_j(p, t, \tau) &:= \nabla V(pt + \tau \nabla_p X^{(j)}(p, t) + (1-\tau) \nabla_p \tilde{X}^{(j)}(p, t)) \\ C_j(p, t) &:= \nabla_p X^{(j)}(p, t) - \nabla_p \tilde{X}^{(j)}(p, t) \end{aligned}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq N-1$, $p \in K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t > 0$ und $\tau \in [0, 1]$.

Aus den Eigenschaften (3.17) für $X^{(j)}$ und $\tilde{X}^{(j)}$ folgt mit der Voraussetzung an V und dem Lemma A.4 für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| \leq N-j-1$ (man beachte, daß $\delta \leq \tilde{\delta}$)

$$|D_p^\beta B_j(p, t, \tau)| \leq C'_{|\beta|, K, j} (1 + t)^{-1-\delta}$$

für alle $(p, t) \in K \times \mathbb{R}_+$ und $\tau \in [0, 1]$.

Zusammen mit (3.23) ergibt sich nach Anwendung von Lemma A.2

$$|D_p^\gamma \int_0^1 \langle B_j(p,t,\tau), C_j(p,t) \rangle d\tau| \leq C''_{|\gamma|,K,j} (1+t)^{-c(|\gamma|)} \quad (3.25)$$

für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\gamma| \leq N-j-1$, wobei

$$\begin{aligned} c(i) &:= \max\{-1-\delta+1-\sigma(i+j)-(j-1)\delta, -1-\delta+1-\sigma(j)-(j-1)\delta\} \\ &= \sigma(i+j)-j\delta \quad (0 \leq i \leq N-j-1), \end{aligned}$$

da σ monoton fallend ist.

Wiederum mit Hilfe von Lemma A.3 zeigt man unter Berücksichtigung von (3.22) und (3.17) mit $\tilde{X}^{(j)}$ an Stelle von $X^{(j)}$ für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$ und $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\gamma| \leq N-j-1$

$$|D_p^\gamma (V-\tilde{V})(pt + \nabla_p \tilde{X}^{(j)}(p,t))| \leq C'''_{|\gamma|,K,j} (1+t)^{d(|\gamma|)}, \quad (3.26)$$

wobei

$$\begin{aligned} d(i) &:= \max\{-i-\sigma(i)+i, -1-\sigma(1)+1-(i-1)\tilde{\delta}\} \\ &= \max\{-\sigma(i), -\sigma(1)-(i-1)\tilde{\delta}\} \quad (1 \leq i \leq N-j-1), \end{aligned}$$

und

$$d(0) = -\sigma(0).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sigma(i+1) + \delta &< \sigma(i+1) + \frac{1}{N} \\ &= \sigma(i) \quad (0 \leq i \leq N-2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

ist

$$\begin{aligned} \sigma(1) + (i-1)\delta &\geq \sigma(i) + i\delta \\ &\geq \sigma(i) \quad (1 \leq i \leq N-1), \end{aligned}$$

so daß mit $\delta \leq \tilde{\delta}$

$$d(i) = -\sigma(i) \quad (0 \leq i \leq N-j-1)$$

folgt.

Ebenso läßt sich durch iterierte Anwendung von (3.27)

$$\sigma(i+j) + j\delta < \sigma(i) \quad (1 \leq j \leq N-1; 0 \leq i \leq N-j-1) \quad (3.28)$$

zeigen, so daß man für alle Multiindizes γ mit $0 \leq |\gamma| \leq N-j-1$ erhält:

$$\begin{aligned} |D_p^\gamma \tilde{R}^{(j)}(p,t)| &\leq |D_p^\gamma \int_0^1 \langle B_j(p,t,\tau), C_j(p,t) \rangle d\tau| + |D_p^\gamma (V-\tilde{V})(pt + \nabla_p \tilde{X}^{(j)}(p,t))| \\ &\leq \bar{C}_{|\gamma|,K,j} (1+t)^{c(|\gamma|)} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Mit einem Induktionsschluß zeigen wir nun (3.23):

j = 1: Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $1 \leq |\beta| \leq N-1$, dann erhalten wir mit Lemma A.4

$$\begin{aligned} |D_p^\beta (X^{(1)}(p,t) - \tilde{X}^{(1)}(p,t))| &\leq \int_0^t |D_p^\beta (V - \tilde{V})(ps)| ds \\ &\leq C_{|\beta|,K,0} (1+t)^{1-\sigma(|\beta|)} \end{aligned}$$

für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$ mit einer positiven Konstante $C_{|\beta|,K,0}$, da

$$\sigma(i) = \delta + \frac{N-i}{N} < \delta + (N-i)\delta < N\delta < 1 \quad (1 \leq i \leq N-1). \quad (3.29)$$

j → j+1: Sei (3.23) und damit auch (3.24), wie oben gezeigt, für ein $j \leq N-2$ gültig. Dann ergibt sich für alle Multiindizes β mit $1 \leq |\beta| \leq N-j-1$

$$\begin{aligned} |D_p^\beta (X^{(j+1)}(p,t) - \tilde{X}^{(j+1)}(p,t))| &\leq \int_0^t |D_p^\beta \tilde{R}^{(j)}(p,s)| ds \\ &\leq C_{|\beta|,K,j+1} (1+t)^{1-\sigma(|\beta|+j)-j\delta} \end{aligned}$$

für alle $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$, denn (3.28) in Verbindung mit (3.29) liefert

$$\sigma(i+j) + j\delta < \sigma(i) < 1 \quad (1 \leq i \leq N-j-1; 0 \leq j \leq N-2).$$

■

4. Äquivalenz verschiedenartig modifizierter Wellenoperatoren

4.1 Eine verallgemeinerte Existenz- und Invarianzaussage

Wir sind jetzt in der Lage, den ersten Hauptsatz dieser Arbeit zu formulieren und zu beweisen.

Satz 4.1:

Sei $\kappa \in \mathbb{N}$ und $\delta, \tilde{\delta} \in (\frac{1}{\kappa+1}, 1)$ mit $\delta \leq \tilde{\delta}$.

Gegeben seien ein zulässiges Potential V mit der Eigenschaft, daß $(H_0 + V) \upharpoonright \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ eine selbst-adjungierte Fortsetzung H besitzt, und zwei Zerlegungen von V

$$V = V_S + V_L, \quad V = \tilde{V}_S + \tilde{V}_L$$

in der Art, daß V_L und \tilde{V}_L langreichweitige C^κ -Potentiale mit Abfallerponenten $\delta, \tilde{\delta}$ sind und die Differenz der kurzreichweitigen Anteile \tilde{V}_S und V_S für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq N-1$, $N = [\frac{1}{\tilde{\delta}}]$,

$$|D^\alpha(\tilde{V}_S - V_S)(x)| \leq C_S (1 + |x|)^{-|\alpha| - \sigma(|\alpha|)} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (4.1)$$

mit einer Konstanten $C_S > 0$ und $\sigma(i) \geq \delta + \frac{N-i}{N}$ ($0 \leq i \leq N-1$) genügt.

Seien X und \tilde{X} C^κ -Modifikatoren bzgl. V_L bzw. \tilde{V}_L , dann existieren sowohl die mit X als auch die mit \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren W_\pm bzw. \tilde{W}_\pm und es gibt unitäre Operatoren U_\pm in $L^2(\mathbb{R}^n)$, so daß gilt:

$$\tilde{W}_\pm = W_\pm U_\pm. \quad (4.2)$$

Beweis: In einem ersten Beweisschritt zeigen wir, daß sich die Existenz der mit X und \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren gegenseitig bedingt und (4.2) erfüllt ist, sofern einer der beteiligten Wellenoperatoren existiert.

Nach Korollar 2.2 genügt es dazu nachzuweisen, daß mit $Y := X - \tilde{X}$ $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} Y(p,t)$ für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert.

Sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann gibt es ein $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $p \in K$, so daß mit

$$g(p,s) := ps + \nabla_p X(p,s),$$

$$\tilde{g}(p,s) := ps + \nabla_p \tilde{X}(p,s) \quad ((p,s) \in K \times \mathbb{R}_+)$$

für alle $t' > t > T'_K := \max\{T_K, \tilde{T}_K\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 |Y(p, t') - Y(p, t)| &= \left| \int_t^{t'} \left(V_L(g(p, s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}(p, s)) + R(p, s) - \tilde{R}(p, s) \right) ds \right| \\
 &\leq \int_t^{t'} |V_L(g(p, s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}(p, s))| ds + \int_t^{t'} |R(p, s) + \tilde{R}(p, s)| ds, \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

wobei

$$|R(p, t)| = \left| \frac{\partial}{\partial t} X(p, t) - V_L(g(p, t)) \right| \leq C_K t^{-1-\delta_r} \quad (p \in K, t > T_K)$$

und

$$|\tilde{R}(p, t)| = \left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{X}(p, t) - \tilde{V}_L(\tilde{g}(p, t)) \right| \leq \tilde{C}_K t^{-1-\tilde{\delta}_r} \quad (p \in K, t > \tilde{T}_K)$$

gelten. Zu einem vorgegebenen $\epsilon > 0$ gibt es daher ein $T'_{K, \epsilon} \geq \max\{1, T'_K\}$, so daß für alle $t' > t > T'_{K, \epsilon}$ gilt:

$$\int_t^{t'} (|R(p, s)| + |\tilde{R}(p, s)|) ds \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Um den ersten Summanden in (4.3) abzuschätzen, nehmen wir die j -fach iterierten Modifikationsterme $X^{(j)}$ bzw. $\tilde{X}^{(j)}$ bezüglich V_L bzw. \tilde{V}_L zu Hilfe und setzen für alle $j \in \mathbb{N}_0$ mit $j \leq \kappa$

$$g_j(p, s) := ps + \nabla_p X^{(j)}(p, s),$$

$$\tilde{g}_j(p, s) := ps + \nabla_p \tilde{X}^{(j)}(p, s) \quad ((p, s) \in K \times \mathbb{R}_+).$$

Dazu ist zu bemerken, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, daß $\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\tilde{\delta}} \notin \mathbb{N}$, was nach Bemerkung 3.2 ii) ohne weiteres möglich ist.

Sei nun $N := [\frac{1}{\delta}]$ und $M := [\frac{1}{\tilde{\delta}}]$, dann ist $N \geq M$ wegen $\delta \leq \tilde{\delta}$, und wir erhalten für alle $s \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
 &|V_L(g(p, s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}(p, s))| \\
 &\leq |V_L(g(p, s)) - V_L(g_{N-1}(p, s))| + |V_L(g_{N-1}(p, s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}_{N-1}(p, s))| \\
 &\quad + |\tilde{V}_L(\tilde{g}_{N-1}(p, s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}_{M-1}(p, s))| + |\tilde{V}_L(\tilde{g}_{M-1}(p, s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}(p, s))|. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Summand auf der rechten Seite der vorangegangenen Ungleichung (4.4) ist Lemma 3.7 zufolge bezüglich s in $L^1((0, \infty))$, da $(N+1)\delta > 1$ und $(M+1)\tilde{\delta} > 1$.

Setzt man

$$\tilde{R}^{(j)}(p, s) := \tilde{V}_L(\tilde{g}_j(p, s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}_{j-1}(p, s)),$$

so ergibt sich für den dritten Summanden in (4.4) durch Anwendung von Lemma 3.4 im Fall $N > M$ (wo überhaupt nur ein solcher Summand auftritt)

$$\begin{aligned} |\tilde{V}_L(\tilde{g}_{N-1}(p,s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}_{M-1}(p,s))| &\leq \sum_{j=M}^{N-1} |\tilde{R}^{(j)}(p,s)| \\ &\leq \sum_{j=M}^{N-1} \bar{C}_{0,K,j} (1+s)^{-1-\tilde{\delta}} \quad (s \in \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Da nun $V_L - \tilde{V}_L = \tilde{V}_S - V_S$ die Voraussetzung von Lemma 3.8 erfüllt, hat man schließlich für alle $s > 0$

$$|V_L(g_{N-1}(p,s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}_{N-1}(p,s))| \leq \bar{C}_{0,K,N-1} (1+s)^{-\rho},$$

wobei $\rho = \delta + \frac{1}{N} + (N-1)\delta > (N+1)\delta > 1$.

Somit ist $(V_L \circ g - \tilde{V}_L \circ \tilde{g})(p, \cdot) \in L^1((0, \infty))$ und es gibt ein $T''_{K,\epsilon} > 0$, so daß für alle $t' > t > T''_{K,\epsilon}$

$$\int_t^{t'} |V_L(g(p,s)) - \tilde{V}_L(\tilde{g}(p,s))| ds < \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Die Existenz von $\lim_{t \rightarrow -\infty} Y(p,t)$ zeigt man in analoger Art und Weise.

Der zweite Beweisschritt wird nun darin bestehen, die Existenz der mit X modifizierten Wellenoperatoren W_{\pm} nachzuweisen.

Dazu zerlegen wir gemäß Lemma 1.18

$$V_L = \bar{V}_S + \bar{V}_L,$$

wobei \bar{V}_L der Voraussetzung 1.17 mit $\kappa_0 = N$ genügt, was möglich ist, da $V_L \in C^{\kappa}(\mathbb{R}^n) \subset C^N(\mathbb{R}^n)$ ist. Zu \bar{V}_L gibt es nach Satz 1.19 ein $\bar{X} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, das infolge der Eigenschaften (1.18) und (1.19) ein C^N -Modifikator bezüglich \bar{V}_L darstellt, für den nach Satz 1.20 die Existenz der mit \bar{X} modifizierten Wellenoperatoren \bar{W}_{\pm} gesichert ist.

Die Differenz \bar{V}_S der kurzreichweitigen Anteile der Zerlegungen

$$V = V_S + V_L, \quad V = V_S + \bar{V}_S + \bar{V}_L$$

erfüllt nach Lemma 1.18 die Voraussetzung dieses Satzes, so daß mit dem im ersten Schritt Bewiesenen und der Tatsache, daß der C^{κ} -Modifikator X auch ein C^N -Modifikator ist, die Existenz der mit X modifizierten Wellenoperatoren W_{\pm} aus der Existenz von \bar{W}_{\pm} folgt.

Wendet man diese Schlußweise ein weiteres Mal auf X und \bar{X} an, erhält man schließlich auch die Existenz der mit \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren \tilde{W}_{\pm} und die Gültigkeit von (4.2). ■

4.2 Ein Existenzbeweis für die mit iterierten Modifikationstermen gebildeten Wellenoperatoren

Als eine erste Anwendung des Satzes 4.1 zeigen wir die Existenz der mit iterierten Modifikationstermen hinreichend hoher Iterationsstufe gebildeten Wellenoperatoren.

Korollar 4.2:

Sei V ein zulässiges Potential, so daß $(H_0 + V) \upharpoonright \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine selbstadjungierte Fortsetzung H besitzt und der langreichweitige Anteil $V_L \in C^\kappa$ mit einem Abfallerponenten $\delta > \frac{1}{\kappa+1}$ versehen ist, derart daß $N := \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor \neq \frac{1}{\delta}$ gilt.

Dann existieren die mit $X^{(j)}$ und $X_s^{(j)}$ modifizierten Wellenoperatoren $W_\pm^{(j)}$ bzw. $\tilde{W}_\pm^{(j)}$ für $j = N, \dots, \kappa$ und es gilt für alle $l, m \in \mathbb{N}$ mit $N \leq m < l \leq \kappa$

$$\tilde{W}_\pm^{(l)} = \tilde{W}_\pm^{(m)} \quad (4.5)$$

$$W_\pm^{(l)} = W_\pm^{(m)} U_\pm^{(m,l)}, \quad (4.6)$$

mit $U_\pm^{(m,l)} u := \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-iF_\pm^{(m,l)}(\cdot)} \hat{u} \right) \quad (u \in L^2(\mathbb{R}^n)),$ wobei für alle $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$F_\pm^{(m,l)}(p) := \int_0^{\pm\infty} \left(V_L(ps + \nabla_p X^{(l-1)}(p,s)) - V_L(ps + \nabla_p X^{(m-1)}(p,s)) \right) ds. \quad (4.7)$$

Beweis: Die Existenz von $W_\pm^{(j)}$ bzw. $\tilde{W}_\pm^{(j)}$ folgt unmittelbar aus Satz 4.1 und Lemma 3.3 bzw. 3.4, die, wie in Bemerkung 3.5 ausgeführt, implizieren, daß $X^{(j)}$ bzw. $X_s^{(j)}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $N \leq j \leq \kappa$ $C^{\kappa-j+1}$ -Modifikatoren bezüglich V_L bilden.

Bleiben noch die Beziehungen (4.5) und (4.6) zu zeigen. Seien $l, m \in \mathbb{N}$ mit $N \leq m < l \leq \kappa$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $p \in K$, so daß mit Lemma 3.3

$$\begin{aligned} |X_s^{(l)}(p,t) - X_s^{(m)}(p,t)| &\leq \sum_{i=m}^{l-1} |X_s^{(i+1)}(p,t) - X_s^{(i)}(p,t)| \\ &\leq \sum_{i=m}^{l-1} C_{0,K,i} (1 + |t|)^{1-(i+1)\delta} \\ &\leq \frac{1}{1 - T_{K,\epsilon}^{-\delta}} \cdot \max_{m \leq i \leq l-1} C_{0,K,i} \cdot T_{K,\epsilon}^{1-(m+1)\delta} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

für alle $|t| > T_{K,\epsilon} > 1$ gilt, wobei $T_{K,\epsilon}$ wegen $(m+1)\delta > (N+1)\delta > 1$ hinreichend groß gewählt

werden kann. Damit ist

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(X_s^{(l)}(p,t) - X_s^{(m)}(p,t) \right) = 0 \quad (p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

gezeigt, was mit (2.7) und (2.8) in Satz 2.1 (4.5) ergibt.

Zum Nachweis von (4.6) genügt es (für $t > 0$) mit $F := F_+^{(m,t)}$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(X^{(l)}(p,t) - X^{(m)}(p,t) \right) = F(p) \quad (p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

zu zeigen, vorausgesetzt F ist durch (4.7) wohldefiniert. Da aber nach Lemma 3.4 (mit den dortigen Bezeichnungen) $R^{(i)}(p, \cdot) \in L^1((0, \infty))$ für alle $p \in K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ mit $N \leq i \leq \kappa$, ist

$$|F(p)| \leq \sum_{i=m}^{l-1} \int_0^\infty |R^{(i)}(p,s)| ds < \infty \quad (p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Sei $p \in K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\epsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |X^{(l)}(p,t) - X^{(m)}(p,t) - F(p)| &= \left| \int_t^\infty \left(V_L(p,s + \nabla_p X^{(l-1)}(p,s)) - V_L(p,s + \nabla_p X^{(m-1)}(p,s)) \right) ds \right| \\ &\leq \sum_{i=m}^{l-1} \int_t^\infty |R^{(i)}(p,s)| ds \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

für alle $t > T'_{K,\epsilon}$, wo $T'_{K,\epsilon} > 0$ genügend groß gewählt ist. ■

Beispiel 4.3:

Wir wollen noch einmal den Fall des oszillierenden Coulomb - Potentials $V_{OC}(x) = \frac{\sin(|x|^\rho)}{|x|}$ ($x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\rho \in (0, 1)$), das, wie wir in Beispiel 1.21 gesehen hatten, für $0 < \rho < \frac{1}{2}$ ein zulässiges Potential ist, untersuchen. Dabei folgen wir der Vorgehensweise in Beispiel 3.6, wo wir die Existenz gewisser modifizierter Wellenoperatoren für das Coulomb - Potential nachweisen konnten.

Wir zerlegen $V_{OC} = V_{OS} + V_{OL}$ wie in Beispiel 1.21 in einen kurzreichweitigen Anteil V_{OS} und ein $V_{OL} \in C^\infty$ mit $V_{OL}(x) = V_{OC}(x)$ für alle $|x| \geq 2$, so daß zu jedem $\kappa \in \mathbb{N}$ ein $C_\kappa > 0$ existiert mit

$$|D^\alpha V_{OL}(x)| \leq C_\kappa (1 + |x|)^{-|\alpha| - (1-|\alpha|\rho)} \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq \kappa$.

Um sicherzustellen, daß V_{OL} ein langreichweitiges C^κ -Potential mit Abfallexponent $\delta > \frac{1}{\kappa+1}$ darstellt, müssen wir $(1-\kappa\rho) > \frac{1}{\kappa+1}$, d. h. $\rho < \frac{1}{\kappa+1}$ fordern. Wählen wir ein $\tilde{\rho} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $\rho < \tilde{\rho} < \frac{1}{\kappa+1}$, so ist für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ mit $|\alpha| \leq \kappa$

$$|D^\alpha V_{OL}(x)| \leq C_\kappa (1 + |x|)^{-|\alpha|-(1-\kappa\tilde{\rho})} \quad (x \in \mathbb{R}^3)$$

und Korollar 4.2 liefert die Existenz der mit den iterierten Modifikationstermen $X_{OC}^{(j)}$ modifizierten Wellenoperatoren für alle $j = [\frac{1}{1-\kappa\tilde{\rho}}], \dots, \kappa$.

Im Fall $\rho < \frac{1}{2}$ existieren also insbesondere die mit $X_{OC}^{(1)}$ modifizierten Wellenoperatoren, wobei

$$X_{OC}^{(1)}(p,t) := \int_0^t V_{OL}(ps) \, ds \quad ((p,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$$

gilt. Somit erhält man für alle $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $|t| \geq \frac{2}{|p|}$

$$X_{OC}^{(1)}(p,t) = \int_0^{2/|p|} V_{OL}(ps) \, ds + \int_{2/|p|}^t \frac{\sin((|p|s)^\rho)}{|p|s} \, ds.$$

Iteriert man direkt an V_{OC} , was möglich ist, da V_{OC} stetig in den Nullpunkt fortgesetzt werden kann,

$$X_{OC}(p,t) := \frac{1}{|p|} \int_0^t \frac{\sin((|p|s)^\rho)}{s} \, ds,$$

so ergibt sich, verglichen mit $X_{OC}^{(1)}$,

$$X_{OC}^{(1)}(p,t) - X_{OC}(p,t) = \psi(p) \quad (p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, |t| \geq \frac{2}{|p|})$$

mit einer von t unabhängigen, reellwertigen Funktion ψ . Nach Korollar 2.2 existieren demzufolge auch die mit X_{OC} modifizierten Wellenoperatoren und wegen

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} X_{OC}(p,t) &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|p|} \int_0^t \frac{\sin((|p|s)^\rho)}{s} \, ds \\ &= \frac{1}{\rho|p|} \int_0^{\pm\infty} \frac{\sin\tau}{\tau} \, d\tau \\ &= \pm \frac{\pi}{2\rho|p|} \quad (|p| \neq 0) \end{aligned}$$

folgt mit Satz 2.3 die Existenz der gewöhnlichen Wellenoperatoren.

Außerdem läßt sich zeigen, daß für jedes $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$, $u \neq 0$

$$\int_{t_0}^{\infty} \|V_{OC} e^{-itH_0} u\| dt = \infty \quad (t_0 \in \mathbb{R})$$

gilt, so daß die Methode von Cook in diesem Falle nicht anwendbar ist. (vgl. Alsholm [1]) □

4.3 Eine allgemeine Existenz- und Invarianzaussage bezüglich zeitabhängiger Modifikatoren

Als eine letzte Verallgemeinerung der in Satz 4.1 gewonnenen Aussage wollen wir jetzt die dort gemachten Voraussetzungen dahingehend abschwächen, daß wir an die Differenz der kurzreichweitigen Anteile V_S und \tilde{V}_S zweier Zerlegungen eines zulässigen Potentials keine zusätzlichen Bedingungen mehr stellen. Wäre nämlich z.B.

$$(\tilde{V}_S - V_S)(x) = V_\sigma(x) := (1 + |x|)^{-1} (\log(|x| + 2))^{-1-\sigma} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

mit $\sigma > 0$, so ließe sich zeigen, daß V_σ kurzreichweitig im Sinne der Definition 1.1 ist, aber

$$|D^\alpha V_\sigma(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{-1|\alpha|-1} (\log(|x| + 2))^{-1-\sigma}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt und (4.1) nicht erfüllbar ist.

Die Beweismethode des folgenden Satzes ist der Arbeit von Hörmander entnommen ([6], vgl. Theorem 3.10) und beruht auf der Beobachtung, daß die Differenz $Y := X - \tilde{X}$ zweier C^κ -Modifikatoren X und \tilde{X} einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt.

Wir werden darauf aufbauend zeigen, daß $Y(\xi_t(\cdot), t)$ auf der Schar der Charakteristiken $\{\xi_t\}_{t > t_0}$ dieser Differentialgleichung einen Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ in L_{loc}^1 besitzt. Ein genaues Studium der Charakteristiken ξ_t wird uns dann in die Lage versetzen, zu folgern, daß $e^{iY(\cdot, t)}$ lokal dem Maße nach konvergent ist und damit die in Satz 2.1 angegebene hinreichende Bedingung für die Äquivalenz der mit X und \tilde{X} modifizierten Wellenoperatoren hinsichtlich ihrer Existenz und Vollständigkeit erfüllt.

Satz 4.4:

Gegeben seien ein zulässiges Potential V und zwei Zerlegungen desselben

$$V = V_S + V_L, \quad V = \tilde{V}_S + \tilde{V}_L,$$

derart daß V_S und \tilde{V}_S kurzreichweitig sind und für eine natürliche Zahl $\kappa \geq 2$ die langreichweitigen Anteile $V_L, \tilde{V}_L \in C^\kappa(\mathbb{R}^n)$ mit Abfall exponenten $\delta, \tilde{\delta} \in (0, 1)$ versehen sind.

Sind mit X und \tilde{X} zeitabhängige C^κ -Modifikatoren bezüglich V_L bzw. \tilde{V}_L gegeben und besitzt $(H_0 + V) \upharpoonright \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ eine selbstadjungierte Fortsetzung H , so existieren

$$W_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0 - iX_t},$$

$$\tilde{W}_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0 - i\tilde{X}_t},$$

und es gibt unitäre Operatoren U_\pm in $L^2(\mathbb{R}^n)$, so daß

$$\tilde{W}_\pm = W_\pm U_\pm$$

gilt.

Beweis: Sei $Y := X - \tilde{X}$. Dann gilt für alle $(p, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t}(p, t) &= V_L(pt + \nabla_p X(p, t)) - \tilde{V}_L(pt + \nabla_p \tilde{X}(p, t)) + R(p, t) - \tilde{R}(p, t) \\ &= V_L(pt + \nabla_p X(p, t)) - V_L(pt + \nabla_p \tilde{X}(p, t)) + V_L(pt + \nabla_p \tilde{X}(p, t)) - \tilde{V}_L(pt + \nabla_p \tilde{X}(p, t)) \\ &\quad + R(p, t) - \tilde{R}(p, t) \\ &= \int_0^1 \langle \nabla V_L(pt + \tau \nabla_p X(p, t) + (1-\tau) \nabla_p \tilde{X}(p, t)), \nabla_p Y(p, t) \rangle d\tau \\ &\quad + (V_L - \tilde{V}_L)(pt + \nabla_p \tilde{X}(p, t)) + (R - \tilde{R})(p, t). \end{aligned}$$

Setzt man für alle $p \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $\tau \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h(p, t, \tau) &:= pt + \tau \nabla_p X(p, t) + (1-\tau) \nabla_p \tilde{X}(p, t) \\ b(p, t) &:= \int_0^1 \nabla V(h(p, t, \tau)) d\tau \\ a(p, t) &:= (V_L - \tilde{V}_L)(h(p, t, 0)) + (R - \tilde{R})(p, t), \end{aligned} \tag{4.8}$$

so zeigt sich, daß Y die quasilineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(p,t) = \langle b(p,t), \nabla_p Y(p,t) \rangle + a(p,t)$$

erfüllt.

Ähnlich wie im Beweis zum Lemma 3.3 erhalten wir durch Anwendung von Lemma A.4 aus den Eigenschaften (2.25) für X und \tilde{X} und der Voraussetzung an $V_L \in C^\kappa \subset C^2$

$$|D_p^\alpha b(p,t)| \leq C_K (1+t)^{-1-\delta} \quad ((p,t) \in K \times \mathbb{R}_+)$$

für jedes beliebige Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq 1$.

Wir fassen das Ergebnis des 1. Beweisschritts zusammen:

□ $Y := X - \tilde{X}$ erfüllt für alle $(p,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(p,t) = \langle b(p,t), \nabla_p Y(p,t) \rangle + a(p,t), \quad (4.9)$$

wo $a \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ und $b \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ wie in (4.8) definiert sind und es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine positive Konstante C_K gibt, so daß

$$|D_p^\alpha b(p,t)| \leq C_K (1+t)^{-1-\delta} \quad (4.10)$$

für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq 1$ und $(p,t) \in K \times \mathbb{R}_+$.

Im nächsten Schritt zeigen wir:

□ Seien $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $K_I \subset \subset \mathring{K}$ mit $K_I \subset \mathring{K}$. Dann gibt es ein $T_0 > 0$, so daß zu jedem $\eta \in K_I$ und jedem $t_0 > T_0$ eine auf $[t_0, \infty)$ maximal fortgesetzte, eindeutige Lösungskurve ψ_{η, t_0} von

$$\dot{p} = -b(p,t) \quad (4.11)$$

mit $\psi_{\eta, t_0}(t_0) = \eta$ existiert, derart daß $\psi_{\eta, t_0}(t) \in \mathring{K}$ für alle $t > t_0$ gilt, d. h. genauer ist

$$|\psi_{\eta, t_0}(t) - \psi_{\eta, t_0}(t_0)| \leq \frac{1}{2} \inf \{|x - y| \mid x \in K_I, y \in \partial K\} : \quad (4.12)$$

Da $b(p,t)$ wegen (4.10) einer bezüglich $p \in K$ globalen Lipschitzbedingung in $G := \mathring{K} \times \mathbb{R}_+$ genügt, existiert zu jedem $(\eta_0, t_0) \in G$ eine maximal fortgesetzte, eindeutige Lösung ψ von (4.11) auf

$\overset{\circ}{K} \times (t_0, T)$ mit $\psi(t_0) = \eta_0 \in K_1$. Angenommen es sei $T < \infty$, so gäbe es eine Folge $\{t_n\} \subset (t_0, T)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = T$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(t_n) \in \partial K$, im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} |\psi(t) - \psi(t_0)| &\leq \int_{t_0}^t |b(\psi(s), s)| \, ds \\ &\leq \tilde{C}_K (1 + T_0)^{-\delta} \\ &\leq \frac{1}{2} \inf \{ |x - y| \mid x \in K_1, y \in \partial K \} \end{aligned}$$

für alle $t > t_0 > T_0$, sofern T_0 hinreichend groß gewählt ist.

□ Seien K, K_1 und ψ_{η, t_0}, T_0 wie in □ gegeben, dann gibt es ein $\tilde{t}_0 > T_0$, so daß für alle $t > \tilde{t}_0$

$$\begin{aligned} \xi_t : K_1 &\rightarrow \overset{\circ}{K} \\ \eta &\mapsto \psi_{\eta, t_0}(t) \end{aligned}$$

ein C^1 -Diffeomorphismus von $\overset{\circ}{K}_1$ auf $\xi_t(\overset{\circ}{K}_1)$ ist und für alle $t > \tilde{t}_0$ gilt:

$$\sup \{ |D_{\eta}^{\alpha} (\xi_t(\eta) - \eta)| \mid \eta \in K_1, |\alpha| = 1 \} < \frac{1}{2} : \quad (4.13)$$

Die Lösungen ψ_{η, t_0} von (4.11) sind auf (t_0, ∞) nach ihren Anfangswerten $\eta \in \overset{\circ}{K}_1$ stetig differenzierbar, was im wesentlichen aus $b \in C^1$ folgt (vgl. Walter [14], §13, Satz X). Außerdem lassen sich $D_{\eta}^{\alpha} \psi_{\eta, t_0}$ stetig auf K_1 fortsetzen ($|\alpha| \leq 1$), so daß $\xi_t \in C^1(K)$ für alle $t > T_0$.

Wegen (4.10) gibt es ein $T'_0 > 0$, so daß für alle $t > T'_0$

$$\beta_t := \sup \left\{ \int_{T'_0}^t |D_p^{\alpha} b(p, s)| \, ds \mid p \in K, |\alpha| = 1 \right\} < \frac{1}{3}$$

gilt. Sei nun $t > \tilde{t}_0 := \max\{T_0, T'_0\}$, so ist nach Anwendung der Kettenregel für $|\alpha| = 1$

$$\begin{aligned} D_{\eta}^{\alpha} (\xi_t(\eta) - \eta) &= D_{\eta}^{\alpha} (\xi_t(\eta) - \xi_{\tilde{t}_0}(\eta)) \\ &= - \int_{\tilde{t}_0}^t D_{\xi}^{\alpha} b(\xi_s(\eta), s) (D_{\eta}^{\alpha} (\xi_s(\eta) - \eta) + D_{\eta}^{\alpha} \eta) \, ds, \end{aligned}$$

so daß folgt:

$$\sup \{ |D_{\eta}^{\alpha} (\xi_t(\eta) - \eta)| \mid \eta \in K_1, |\alpha| = 1 \} \leq \frac{\beta_t}{1 - \beta_t} < \frac{1}{2}.$$

Sei $\eta \in \overset{\circ}{K}_1$ und $U_\epsilon(\eta) \subset \overset{\circ}{K}_1$. Dann folgt mit dem Mittelwertsatz und (4.13) für alle $\tilde{\eta} \in U_\epsilon(\eta)$

$$|\xi_t(\eta) - \xi_t(\tilde{\eta}) - (\eta - \tilde{\eta})| \leq \frac{1}{2} |\eta - \tilde{\eta}|,$$

und somit

$$|\eta - \tilde{\eta}| - |\xi_t(\eta) - \xi_t(\tilde{\eta})| \leq \frac{1}{2} |\eta - \tilde{\eta}|,$$

was zusammengenommen

$$\frac{1}{2} |\eta - \tilde{\eta}| \leq |\xi_t(\eta) - \xi_t(\tilde{\eta})| \leq \frac{3}{2} |\eta - \tilde{\eta}|$$

ergibt. ξ_t ist also injektiv und wegen (4.13) besitzt ξ_t lokal stetig differenzierbare Umkehrabbildungen.

□ ξ_t konvergiert für $t \rightarrow \infty$ in der C^1 -Topologie gegen einen C^1 -Diffeomorphismus ξ_∞ , so daß

$$|\xi_\infty(\eta) - \eta| \leq \frac{1}{2} \inf \{ |x - y| \mid x \in K_1, y \in \partial K \} \quad (4.14)$$

für alle $\eta \in K_1$ gilt:

Sei $t' > t > \tilde{t}_0$, dann gilt wegen (4.10) und (4.13)

$$\begin{aligned} \|\xi_{t'} - \xi_t\| &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \sup_{\eta \in K_1} |D^\alpha(\xi_{t'}(\eta) - \xi_t(\eta))| \\ &\leq \sup_{\eta \in K_1} \int_t^{t'} |b(\xi_s(\eta), s)| ds + \sup_{\substack{\eta \in K_1 \\ |\alpha|=1}} |D_\eta^\alpha \int_t^{t'} b(\xi_s(\eta), s) ds| \\ &\leq \tilde{C}_K (1+t)^{-\delta} + \int_t^{t'} \sup_{\substack{p \in K \\ |\alpha|=1}} |D_p^\alpha b(p, s)| \cdot \sup_{\substack{\eta \in K_1 \\ |\alpha|=1}} |D_\eta^\alpha \xi_s(\eta)| ds \\ &\leq \tilde{C}_K (1+\tilde{t}_0)^{-\delta} + \frac{3}{2} C_K \int_t^{t'} (1+s)^{-1-\delta} ds \\ &\leq C (1+\tilde{t}_0)^{-\delta}, \end{aligned}$$

so daß wegen der Vollständigkeit von C^1 ein $\xi_\infty \in C^1(K_1)$ existiert mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_t - \xi_\infty\|_{C^1} = 0.$$

Darüberhinaus ist für alle $\eta \in K_1$, $|\alpha| \leq 1$

$$\begin{aligned} |D_\eta^\alpha (\xi_\infty(\eta) - \eta)| &\leq |D_\eta^\alpha (\xi_\infty(\eta) - \xi_t(\eta))| + |D_\eta^\alpha (\xi_t(\eta) - \eta)| \\ &\leq \|\xi_\infty - \xi_t\| + |D_\eta^\alpha (\xi_t(\eta) - \eta)|, \end{aligned}$$

so daß für $|\alpha| = 1$

$$|D_\eta^\alpha (\xi_\infty(\eta) - \eta)| \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Mit den gleichen Argumenten wie in [2] läßt sich folgern, daß ξ_∞ ein C^1 -Diffeomorphismus ist und für $|\alpha| = 0$ ist wegen (4.12)

$$|\xi_\infty(\eta) - \eta| \leq \|\xi_\infty - \xi_t\| + \frac{1}{2} \inf \{|x - y| \mid x \in K_1, y \in \partial K\}$$

und damit (4.14) erfüllt.

[5] Es gibt ein $T_1 > \tilde{t}_0$, so daß für alle $t > T_1$

$$\begin{aligned} \varphi_t : K_1 &\rightarrow \mathring{K} \\ \eta &\mapsto \xi_t(\eta) + \frac{1}{t} \nabla_\xi \tilde{X}(\xi_t(\eta), t) \end{aligned}$$

stetig differenzierbar ist und für alle $\eta \in \mathring{K}_1$ und $t > T_1$

$$|\det D_\eta \varphi_t| > c_\theta > 0 : \tag{4.15}$$

Sei $\eta \in K_1$ und $|\alpha| \leq 1$, so ist

$$|D_\eta^\alpha (\varphi_t(\eta) - \eta)| \leq |D_\eta^\alpha (\xi_t(\eta) - \eta)| + \frac{1}{t} |D_\eta^\alpha (\nabla_\xi \tilde{X}(\xi_t(\eta), t))|.$$

Nach Voraussetzung an \tilde{X} gilt für alle $p \in K$, $|\beta| \leq 2$

$$|D_p^\beta \tilde{X}(p, t)| \leq \tilde{C} (1 + t)^{1-\delta},$$

so daß für alle $\eta \in \mathring{K}_1$ und alle $t > \hat{T}_1$, wobei \hat{T}_1 hinreichend groß gewählt ist, gilt:

$$\begin{aligned}
 |\varphi_t(\eta) - \eta| &\leq |\xi_t(\eta) - \eta| + \frac{1}{t} |\nabla_\xi \tilde{X}(\xi_t(\eta), t)| \\
 &< \frac{1}{2} \inf_{x \in K_1} \{|x - y| \mid y \in \partial K\} + \tilde{C} \frac{(1+t)^{1-\delta}}{t} \\
 &< \frac{3}{4} \inf_{x \in K_1} \{|x - y| \mid y \in \partial K\}.
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $\varphi_t(\eta) \in \overset{\circ}{K}$ für alle $t > \tilde{T}_1$, $\eta \in K_1$ und demzufolge ist φ_t für alle $t > T_1 \geq \tilde{T}_1$ wohldefiniert. T_1 wählen wir nun so, daß für $|\alpha| = 1$ und alle $t > T_1$

$$\begin{aligned}
 |D_\eta^\alpha (\varphi_t(\eta) - \eta)| &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{t} \sup_{\substack{p \in K \\ |\beta|=2}} |D_p^\beta \tilde{X}(p, t)| \cdot \sup_{\substack{\eta \in K_1 \\ |\beta|=1}} |D_\eta^\beta \xi_t(\eta)| \\
 &< \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tilde{C} \frac{(1+t)^{1-\delta}}{t} \\
 &< \frac{3}{4} \quad (\eta \in \overset{\circ}{K}_1)
 \end{aligned}$$

und mithin (4.15) gilt.

⑥ Seien $K, K_0, K_1 \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $K_0 \subset \overset{\circ}{K}_1$ und $K_1 \subset \overset{\circ}{K}$. Dann gibt es ein $Y_\infty \in L^1(K_0)$ mit

$$Y(\xi_t(\cdot), t) \xrightarrow[L^1(K_0)]{t \rightarrow \infty} Y_\infty,$$

wobei ξ_t wie in ③ definiert ist:

Die Gleichung (4.9) nimmt jetzt für $\eta \in \overset{\circ}{K}_1$, $t > \tilde{t}_0$ die Gestalt

$$\frac{d}{dt} Y(\xi_t(\eta), t) = a(\xi_t(\eta), t) \tag{4.16}$$

an und es genügt zu zeigen, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $T_\epsilon > \tilde{t}_0$ gibt, derart daß für alle $t' > t > T_\epsilon$

$$\begin{aligned}
 \int_{K_0} |Y(\xi_{t'}(\eta), t') - Y(\xi_t(\eta), t)| d\eta &\leq \int_{K_0} \int_t^{t'} |V_L - \tilde{V}_L|(\xi_s(\eta), s) + \nabla_\xi \tilde{X}(\xi_s(\eta), s) ds d\eta \\
 &\quad + \int_{K_0} \int_t^{t'} |R - \tilde{R}|(\xi_s(\eta), s) ds d\eta \\
 &< \epsilon.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Der zweite Summand in (4.17) läßt sich leicht für hinreichend große $t' > t$ beliebig klein machen, da für alle $p \in K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nach Voraussetzung $R(p,t) = O(|t|^{-1-\delta_r})$ bzw. $\tilde{R}(p,t) = O(|t|^{-1-\tilde{\delta}_r})$ für $|t| \rightarrow \infty$ mit $\delta_r, \tilde{\delta}_r > 0$ und nach [2] $\xi_s(\eta) \in K$ für alle $\eta \in K_0$ und $s > \tilde{t}_0$ gilt.

Zur Abschätzung des ersten Summanden in (4.17) genügt es wegen $V_L - \tilde{V}_L = \tilde{V}_S - V_S$ und mit den in [5] eingeführten Bezeichnungen

$$\int_{K_0} \int_{T_1}^{\infty} (|\tilde{V}_S(\varphi_t(\eta), t)| + |V_S(\varphi_t(\eta), t)|) dt d\eta < \infty \quad (4.18)$$

zu zeigen.

Wegen (4.15) ist φ_t für alle $t > T_1$ lokal invertierbar, d. h. zu jedem $\eta \in \overset{\circ}{K}_1$ gibt es eine offene Umgebung $U_\eta \subset \overset{\circ}{K}_1$, derart daß $\varphi_t \upharpoonright U_\eta$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist. Da $\bigcup_{\eta \in \overset{\circ}{K}_1} U_\eta \supset K_0$ eine offene Überdeckung von K_0 ist,

enthält diese nach Heine-Borel eine endliche Teilüberdeckung $K_0 \subset \bigcup_{1 \leq i \leq r} U_{\eta_i}$ und $\varphi_t(U_{\eta_i}) \subset \overset{\circ}{K}$ ($1 \leq i \leq r; t > T_1$).

Im Hinblick auf (4.18) können wir nun mit Hilfe der Transformationsformel abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_{K_0} \int_{T_1}^{\infty} |V_S(\varphi_t(\eta), t)| dt d\eta &\leq \sum_{i=1}^r \int_{U_{\eta_i}} \int_{T_1}^{\infty} |V_S(\varphi_t(\eta), t)| dt d\eta \\ &\leq \sum_{i=1}^r \frac{1}{c_0} \int_{U_{\eta_i}} \int_{T_1}^{\infty} |V_S(\varphi_t(\eta), t)| |\det D_\eta \varphi_t| dt d\eta \\ &\leq \frac{r}{c_0} \int_1^{\infty} \int_K |V_S(xt)| dx dt \\ &\leq C \sqrt{\mu(K)} \int_1^{\infty} \left(\int_K |V_S(xt)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Da V_S kurzreichweitig ist, gibt es nach Definition 1.1 für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung $\tilde{U}_y \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\int_1^{\infty} \left(\int_{\tilde{U}_y} |V_S(tx)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt < \infty$$

und $\bigcup_{y \in \mathbb{R}^n \setminus N} \tilde{U}_y$ (N Nullmenge) ist für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine offene Überdeckung,

aus der wiederum eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{1 \leq i \leq \tilde{r}} \tilde{U}_{y_i} \supset K$ ausgewählt werden kann, so daß

$$\int_1^{\infty} \left(\int_K |V_S(xt)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \int_1^{\infty} \left(\int_{\tilde{U}_{y_i}} |V_S(xt)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt < \infty$$

gilt. Mit \tilde{V}_S verfährt man genauso, so daß insgesamt die Gültigkeit von (4.18) folgt.

[7] Seien K, K_0, K_1 Kompakta wie in [6] gewählt und ξ_∞ der C^1 -Limes von ξ_t auf K_1 gemäß [4], dann gilt mit $K_t := \xi_t(K_0)$, $K_\infty := \xi_\infty(K_0)$

$$\int_{K_t \cap K_\infty} |Y(p,t) - Y_\infty \circ \xi_\infty^{-1}(p)| dp \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 :$$

Da ξ_t für alle $t > \tilde{t}_0$ ein C^1 -Diffeomorphismus auf K_1 ist, erhält man mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_{K_t} |Y(p,t) - Y_\infty(\xi_t^{-1}(p))| dp &= \int_{K_0} |Y(\xi_t(\eta),t) - Y_\infty(\eta)| |\det D_\eta \xi_t| d\eta \\ &< \frac{\epsilon}{4} \end{aligned} \quad (4.19)$$

für jedes $\epsilon > 0$ und alle $t > T_\epsilon$, wobei $T_\epsilon > T_1 > \tilde{t}_0$ gemäß [6] hinreichend groß gewählt ist.

Für alle $p \in K_\infty \cap K_t$ ist

$$\begin{aligned} |\xi_\infty^{-1}(p) - \xi_t^{-1}(p)| &= |\xi_\infty^{-1}(\xi_t(\eta)) - \xi_\infty^{-1}(\xi_\infty(\eta))| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{gleichmäßig für } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da $\xi_t \rightarrow \xi_\infty$ gleichmäßig für $t \rightarrow \infty$ und $\xi_\infty^{-1} \upharpoonright K_\infty$ gleichmäßig stetig ist. (K_∞ ist als stetiges Bild des Kompaktums K_0 kompakt.)

Zu $Y_\infty \in L^1(K_0)$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $\tilde{Y}_\infty \in C^0(K_0)$ mit $\|Y_\infty - \tilde{Y}_\infty\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{4\mu(K_\infty)}$, so daß mit (4.19)

$$\begin{aligned} \int_{K_t \cap K_\infty} |Y(p,t) - Y_\infty(\xi_\infty^{-1}(p))| dp &\leq \int_{K_t \cap K_\infty} (|Y(p,t) - Y_\infty \circ \xi_t^{-1}(p)| + |(Y_\infty - \tilde{Y}_\infty) \circ \xi_t^{-1}(p)|) dp \\ &\quad + \int_{K_t \cap K_\infty} (|\tilde{Y}_\infty \circ (\xi_t^{-1} - \xi_\infty^{-1})(p)| + |(\tilde{Y}_\infty - Y_\infty) \circ \xi_\infty^{-1}(p)|) dp \\ &< \frac{3}{4} \epsilon + \int_{K_t \cap K_\infty} |\tilde{Y}_\infty \circ (\xi_t^{-1} - \xi_\infty^{-1})(p)| dp \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

für alle $t > \tilde{T}_\epsilon > T_\epsilon$, wobei \tilde{T}_ϵ genügend groß gewählt ist, was möglich ist, da $\xi_t^{-1} \rightarrow \xi_\infty^{-1}$ gleichmäßig auf $K_\infty \cap K_t$ für $t \rightarrow \infty$, wie oben gezeigt, und \tilde{Y}_∞ auf K_0 gleichmäßig stetig ist.

8 Für jedes $\sigma > 0$ ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu\{p \in K_\infty \mid |e^{i(Y(p,t) - Y_\infty(\xi_\infty^{-1}(p)))} - 1| \geq \sigma\} = 0 : \quad (4.20)$$

Aus 7 folgt, da die L^1 -Konvergenz die Konvergenz dem Maße nach impliziert,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu\{p \in K_\infty \mid |Y(p,t) - Y_\infty \circ \xi_\infty^{-1}(p)| \chi_{K_\infty \cap K_t}(p) \geq \sigma\} = 0 \quad (4.21)$$

für jedes $\sigma > 0$.

Nun gilt für eine Folge meßbarer Funktionen $f_t: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$, die für $t \rightarrow \infty$ dem Maße nach gegen eine meßbare Funktion $f_\infty: U \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, daß auch $e^{if_t} \xrightarrow[\mu]{t \rightarrow \infty} e^{if_\infty}$ gilt, denn für alle $\sigma \in (0, 2)$ folgt mit $\sigma' := \arccos(1 - \frac{\sigma^2}{2})$ aus $|f_t(p) - f_\infty(p)| < \sigma'$

$$|e^{i(f_t(p) - f_\infty(p))} - 1|^2 < 2(1 - \cos \sigma') = \sigma^2.$$

Somit ergibt sich aus (4.21) für alle $\sigma > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu\{p \in K_\infty \mid |e^{i(Y(p,t) - Y_\infty \circ \xi_\infty^{-1}(p))} - 1| \chi_{K_\infty \cap K_t}(p) \geq \sigma\} = 0. \quad (4.22)$$

Des weiteren gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $T_\epsilon \in \mathbb{R}_+$, so daß für alle $t > T_\epsilon$ gilt:

$$\mu(K_\infty \setminus (K_\infty \cap K_t)) < \epsilon. \quad (4.23)$$

Angenommen (4.23) gelte nicht, dann gäbe es eine Folge $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ und ein $\epsilon > 0$, so daß $\mu(K_\infty \setminus (K_\infty \cap K_{t_n})) \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wäre.

Mithin gäbe es ein $p \in K_\infty$ mit $U_\rho(p) \subset K_\infty$ für ein $\rho > 0$ und $U_\rho(p) \cap K_{t_n} = \emptyset$ ($n \in \mathbb{N}$), im Widerspruch dazu, daß ein $\eta \in K_0$ existiert mit $p = \xi_\infty(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t(\eta)$.

Sei nun $\epsilon > 0$ und $\sigma > 0$, so folgt aus (4.22) und (4.23) die Existenz eines $T_{\epsilon, \sigma} > 0$, so daß für alle $t > T_{\epsilon, \sigma}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mu\{p \in K_\infty \mid |e^{i(Y(p,t) - Y_\infty \circ \xi_\infty^{-1}(p))} - 1| \geq \sigma\} \\ & \leq \mu\{p \in K_\infty \mid |e^{i(Y(p,t) - Y_\infty \circ \xi_\infty^{-1}(p))} - 1| \chi_{K_\infty \cap K_t}(p) \geq \sigma\} + 2 \mu(K_\infty \setminus (K_\infty \cap K_t)) \\ & < \epsilon. \end{aligned}$$

9) Um den Beweis des Satzes (für $t > 0$) zu Ende zu führen, ist es nach Satz 2.1 hinreichend, zu zeigen, daß es eine meßbare Funktion F auf \mathbb{R}^n mit $|F| = 1$ fast überall gibt, so daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu\{p \in K \mid |e^{iY(p,t)} - F(p)| \geq \sigma\} = 0 \quad (4.24)$$

für alle $\sigma > 0$ und jedes $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

Sei $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_j \subset \dots$ eine Folge von Kompakta mit $B_j \subset \overset{\circ}{B}_{j+1} \subset \overset{\circ}{K}$ ($j \in \mathbb{N}_0$) und $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \supset K$.

Dann gibt es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $Y_\infty^{(j)} \in L^1(B_{j-1})$ und eine C^1 -invertierbare Abbildung $\xi_\infty^{(j)}: B_j \rightarrow \overset{\circ}{K}_0$, so daß mit $A_j := \xi_\infty^{(j)}(B_{j-1}) \subset \overset{\circ}{K}$

$$\mu\{p \in A_j \mid |e^{i(Y(p,t) - Y_\infty^{(j)} \circ (\xi_\infty^{(j)})^{-1}(p))} - 1| \geq \sigma\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (4.25)$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\sigma > 0$ gilt.

Wegen (4.14) gilt außerdem für alle $\eta \in B_j$

$$\begin{aligned} |(\xi_\infty^{(j)} - \text{id})(\eta)| &\leq \frac{1}{2} \inf \{|x - y| \mid x \in B_j, y \in \partial K\} \\ &\rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

d. h. es gilt $\xi_\infty^{(j)} \rightarrow \text{id}$ in $C(K)$ für $j \rightarrow \infty$, wenn man $\xi_\infty^{(j)}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ stetig auf K fortsetzt. Mit dem gleichen Argument wie in 8) läßt sich nun begründen, daß es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $i_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $i \geq i_\epsilon$ gilt:

$$\mu(K \setminus A_j) < \epsilon. \quad (4.26)$$

Definiert man

$$g_j(p) := \begin{cases} e^{i Y_\infty^{(j)} \circ (\xi_\infty^{(j)})^{-1}(p)} & \text{für } p \in A_j, \\ 1 & \text{für } p \in K \setminus A_j, \end{cases}$$

so ist für $i, j \in \mathbb{N}$

$$g_i \upharpoonright (A_i \cap A_j) \stackrel{\text{f.ii.}}{=} g_j \upharpoonright (A_i \cap A_j),$$

da der Limes einer dem Maße nach konvergenten Folge meßbarer Funktionen bis auf eine Nullmenge

eindeutig bestimmt ist. Damit existiert für fast alle $p \in K$

$$g(p) := \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(p)$$

und g ist meßbar auf K .

Führt man die Konstruktion einer solchen meßbaren Funktion für jedes Kompaktum $K_j \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ einer Folge $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ mit $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = \mathbb{R}^n$ durch, so erhält man eine Folge von meßbaren Funktionen

$$f_j: \mathbb{R}^n \supset K_j \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } |f_j(p)| = 1 \text{ f.f.a. } p \in K_j$$

und

$$f_{j+1} \upharpoonright K_j \stackrel{\text{f.ü.}}{=} f_j \upharpoonright K_j,$$

denn (4.25) und (4.26) ergeben für alle $\sigma > 0$ und $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu\{p \in K_j \mid |e^{iY(p,t)} - f_j(p)| \geq \sigma\} = 0. \quad (4.27)$$

Mit

$$F(p) := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(p) \quad (\text{f.f.a. } p \in \mathbb{R}^n)$$

erhalten wir das Gewünschte, nämlich eine meßbare Funktion F auf \mathbb{R}^n mit $|F| = 1$ f.ü., für die wegen (4.27) und der Tatsache, daß jedes $K \subset \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in einem K_{j_0} für ein $j_0 \in \mathbb{N}$ enthalten ist, die Beziehung (4.24) gilt.

■

5. Zusammenfassende Bemerkungen

Wir wollen unsere Untersuchungen mit zwei Anmerkungen beschließen, von denen die erste den Aspekt der Vollständigkeit im Rahmen der gewonnenen Ergebnisse beleuchten soll, während wir in einer zweiten, resümierenden Bemerkung noch einmal das eingangs aufgeworfene Problem der Unbestimmtheit der modifizierten Wellenoperatoren aufgreifen wollen.

Unter Bezugnahme auf eine Aussage über die Vollständigkeit modifizierter Wellenoperatoren vom Hörmander-Typ, wie sie im 1. Kapitel betrachtet wurden, lassen sich die Sätze des vorigen Kapitels unter leicht verschärften Voraussetzungen auch auf die Vollständigkeit ausdehnen. Mit Hilfe stationärer Methoden zeigte nämlich Kitada [10], daß für ein zulässiges Potential $V = V_S + V_L$, wobei $|V_S(x)| \leq C_S (1+|x|)^{-1-\delta}$ und V_L die Voraussetzung 1.17 mit $\kappa_0 = 3$ und $\delta_0 = \delta \in (0, 1)$ erfüllt, die mit einer gemäß Satz 1.19 existierenden C^∞ -Lösung X der Hamilton-Jacobi Gleichung modifizierten Wellenoperatoren W_\pm vollständig sind.

Ist nun für $\kappa \geq 3$ ein zeitabhängiger C^κ -Modifikator \tilde{X} bezüglich eines langreichweitigen C^κ -Potentials \tilde{V}_L einer Zerlegung $V = \tilde{V}_S + \tilde{V}_L$ gegeben, so existiert infolge der Ergebnisse des 4. Kapitels der mit \tilde{X} modifizierte Wellenoperator \tilde{W}_\pm und die Wertebereiche von W_\pm und \tilde{W}_\pm sind gleich (bzgl. des gleichen Vorzeichens), so daß das Resultat von Kitada in diesem Falle auch die Vollständigkeit von \tilde{W}_\pm impliziert.

Vom mathematischen Standpunkt aus wirft die Unbestimmtheit der Wellenoperatoren die Frage auf, ob zwei verschiedenartig modifizierte Wellenoperatoren in der Weise äquivalent sind, daß sich ihre Existenz und Vollständigkeit gegenseitig bedingen. Ordnet man die in dieser Arbeit entwickelten Ergebnisse in diesem Zusammenhang ein, so ergibt sich für jedes zulässige Potential V die Existenz einer Äquivalenzklasse von Wellenoperatoren, die alle die modifizierten Wellenoperatoren umfaßt, die mit zeitabhängigen Modifikatoren eines hinreichend glatten, langreichweitigen Anteils von V und solchen Funktionen gebildet werden, die sich von diesen nur auf einer Menge endlichen Maßes unterscheiden.

Da die Wellenoperatoren W_\pm selbst nicht direkt mit physikalischen Meßgrößen in Verbindung stehen, wollen wir zur Betrachtung der physikalischen Aspekte der Nichteindeutigkeit den Streuoperator $S = W_+^* W_-$ untersuchen. Zwei über verschiedenartig modifizierte Wellenoperatoren definierte Streuoperatoren werden wir dabei im physikalischen Sinne äquivalent nennen, wenn sie identische Meßresultate vorhersagen. Existenz und Unitarität des Streuoperators sind, physikalisch gesehen, sicher unverzichtbare Voraussetzungen, so daß die physikalisch relevanten Äquivalenzklassen von Streuoperatoren aus den korrespondierenden Klassen der im mathematischen Sinne äquivalenten

Wellenoperatoren hervorgehen.

Ob man auf diesem Weg tatsächlich zu einer feiner strukturierten Klasseneinteilung gelangt, hängt in erster Linie von der Größe der zugrundegelegten Menge von Observablen ab. Je kleiner die Menge der Observablen ist, um so größer werden die entsprechenden Äquivalenzklassen sein. In dem von uns untersuchten, eingeschränkten Fall, daß sich die Vertreter einer Äquivalenzklasse von Wellenoperatoren durch die Multiplikation eines unitären Operators unterscheiden und die zugehörigen Streuoperatoren infolgedessen unitär äquivalent sind, wird man vermuten, daß es sich hier auch um physikalisch äquivalente Operatoren handelt.

Ein Indiz dafür ist eine Größe, die in Streuexperimenten gemessen wird, nämlich die Wahrscheinlichkeit ein gestreutes Teilchen in einem Kegel C mit Spitze im Punkt des Streuzentrums wiederzufinden. Dollard [5] zeigte, daß diese Wahrscheinlichkeit $P(f, C)$ für einen Anfangszustand f im Einfluß eines Coulomb-artigen Streupotentials, dessen Zentrum mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt, gegeben ist durch

$$P(f, C) = \int_C |(Sf)^\wedge(p)|^2 dp,$$

wobei

$$C := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle \geq \alpha |x|\}$$

für einen Einheitsvektor $n \in \mathbb{R}^3$ und ein $\alpha \in (0, 1]$.

Für einen Streuoperator $\tilde{S} = \tilde{W}_+^* \tilde{W}_- = U_+^* S U_-$, wo $\tilde{W}_\pm = W_\pm U_\pm$, gelangt man somit zu derselben Größe $P(f, C)$, so daß die ‘Scattering-into-cones’-Formel unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten der bezüglich Unitäräquivalenz gebildeten Klassen von Streuoperatoren ist.

Die Frage, ob es zu jedem zulässigen Potential genau eine Äquivalenzklasse von Streuoperatoren gibt, bleibt offen und die Ergebnisse im Fall kurzreichweitiger Potentiale, wo es einen ausgezeichneten Repräsentanten, nämlich den mit den gewöhnlichen Wellenoperatoren gebildeten Streuoperator gibt, lassen vermuten, daß Ähnliches auch im allgemeinen Fall gelten könnte.

Eine Arbeit von Isozaki und Kitada [8], in der Existenz und Vollständigkeit eines neuen Typs von modifizierten Wellenoperatoren mit zeitunabhängigen Modifikatoren gezeigt wurden, lassen Fortschritte in dem Studium der Streuamplitude erkennen, die möglicherweise Aufschluß darüber geben könnten, ob es einen physikalisch ausgezeichneten Streuoperator gibt und wenn ja, welchen Bedingungen er genügen müßte.

Anhang

In diesem Anhang werden die zur Abschätzung von Ableitungen des Produkts und der Hintereinanderschaltung zweier Funktionen benötigten Lemmata formuliert und bewiesen, sowie der Beweis von Lemma 1.18 nachgetragen.

Lemma A.1:

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset U$ kompakt und $f, g \in C^\kappa(U, \mathbb{R})$ für ein $\kappa \in \mathbb{N}$.

Angenommen, es gebe zu jedem Multiindex α, β mit $0 \leq |\alpha|, |\beta| \leq \kappa$ positive Konstanten C_α, \bar{C}_β , derart daß

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_\alpha \quad (x \in K) \quad (\text{A.1})$$

und

$$|D^\beta g(x)| \leq \bar{C}_\beta \quad (x \in K) \quad (\text{A.2})$$

gelte. Dann ist für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\gamma| \leq \kappa$

$$|D^\gamma(f \cdot g)(x)| \leq \hat{C}_\gamma \quad (x \in K), \quad (\text{A.3})$$

wobei $\hat{C}_\gamma = 2^{|\gamma|} \max_{|\alpha|+|\beta|=|\gamma|} (C_\alpha \cdot \bar{C}_\beta)$.

Beweis: Um $D^\gamma(f \cdot g)$ für $|\gamma| \leq \kappa$ abschätzen zu können, benötigen wir die verallgemeinerte Produktregel

$$D^\gamma(f \cdot g)(x) = \sum_{|\sigma| \leq |\gamma|} \binom{\gamma}{\sigma} D^\sigma f(x) D^{\gamma-\sigma} g(x), \quad (\text{A.4})$$

wobei $\binom{\gamma}{\sigma} := \begin{cases} \frac{\gamma!}{\sigma!(\gamma-\sigma)!} & ; |\sigma| \leq |\gamma| \text{ und } \gamma-\sigma \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } \alpha! := \prod_{j=1}^n \alpha_j! \text{ für } \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \\ 0 & ; \text{sonst.} \end{cases}$

Wir zeigen (A.4) durch vollständige Induktion nach $|\gamma|$:

$|\gamma| = 0$: ist klar.

$|\gamma| \rightarrow |\gamma|+1$: Sei $|\gamma| = m < \kappa$ und $\epsilon_j := (\delta_{1,j}, \dots, \delta_{n,j}) \in \mathbb{N}_0^n$, dann ist $|\gamma + \epsilon_j| = m+1 \leq \kappa$ und mit der Induktionsannahme ergibt sich

$$\begin{aligned}
D^{\gamma+\epsilon_j}(f \cdot g)(x) &= D^{\epsilon_j} \sum_{|\sigma| \leq |\gamma|} \binom{\gamma}{\sigma} D^\sigma f(x) D^{\gamma-\sigma} g(x) \\
&= \sum_{|\sigma| \leq |\gamma|} \binom{\gamma}{\sigma} \left(D^{\sigma+\epsilon_j} f(x) D^{\gamma+\epsilon_j-(\sigma+\epsilon_j)} g(x) + D^\sigma f(x) D^{\gamma+\epsilon_j-\sigma} g(x) \right) \\
&= \sum_{1 \leq |\sigma| \leq |\gamma|+1} \binom{\gamma}{\sigma-\epsilon_j} D^\sigma f(x) D^{\gamma+\epsilon_j-\sigma} g(x) + \sum_{|\sigma| \leq |\gamma|} \binom{\gamma}{\sigma} D^\sigma f(x) D^{\gamma+\epsilon_j-\sigma} g(x) \\
&= D^{\gamma+\epsilon_j} f(x) g(x) + \sum_{1 \leq |\sigma| \leq |\gamma|+1} \left(\binom{\gamma}{\sigma-\epsilon_j} + \binom{\gamma}{\sigma} \right) D^\sigma f(x) D^{\gamma+\epsilon_j-\sigma} g(x) \\
&\quad + f(x) D^{\gamma+\epsilon_j} g(x).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\binom{\gamma}{\sigma-\epsilon_j} + \binom{\gamma}{\sigma} = \frac{\sigma_j \gamma! + (\gamma_j + 1 - \sigma_j) \gamma!}{\sigma! (\gamma + \epsilon_j - \sigma)!} = \binom{\gamma + \epsilon_j}{\sigma}, \quad (\text{A.5})$$

folgt die Behauptung (A.4) für $|\gamma| = m + 1$. Weiterhin läßt sich mit (A.5) und einem einfachen Induktionsschluß zeigen, daß

$$\sum_{|\sigma| \leq |\gamma|} \binom{\gamma}{\sigma} = 2^{|\gamma|}$$

gilt und demzufolge (A.3) sofort aus (A.4) folgt. ■

Lemma A.2:

Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset U$ kompakt und $\kappa \in \mathbb{N}$.

Gegeben seien weiterhin zwei, von einem positiven reellen Parameter t abhängige Funktionen $f_t, g_t \in C^\kappa(U, \mathbb{R})$, so daß es zu jedem Multiindex α, β mit $0 \leq |\alpha|, |\beta| \leq \kappa$ positive Konstanten C_α, \bar{C}_β gibt, derart daß

$$|D^\alpha f_t(x)| \leq C_\alpha (1+t)^{a(|\alpha|)} \quad (x \in K; t > 0) \quad (\text{A.6})$$

und

$$|D^\beta g_t(x)| \leq \bar{C}_\beta (1+t)^{b(|\beta|)} \quad (x \in K; t > 0) \quad (\text{A.7})$$

mit konvexen Folgen $a(j)$ und $b(j)$ ($0 \leq j \leq \kappa$) erfüllt sind. Dann gilt für $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq |\gamma| \leq \kappa$

$$|D^\gamma (f_t \cdot g_t)(x)| \leq \hat{C}_\gamma (1+t)^{c(|\gamma|)} \quad (x \in K; t > 0), \quad (\text{A.8})$$

wobei $\hat{C}_\gamma = 2^{|\gamma|} \max_{|\alpha|+|\beta|=|\gamma|} (C_\alpha \cdot \bar{C}_\beta)$ und $c(j) = \max\{a(j)+b(0), a(0)+b(j)\}$ ($1 \leq j \leq \kappa$) gilt.

Beweis: Mit Lemma A.1 ergibt sich für alle Multiindizes γ mit $|\gamma| \leq \kappa$

$$|D^\gamma(f_t \cdot g_t)(x)| \leq 2^{|\gamma|} \max_{|\alpha|+|\beta|=|\gamma|} \left(C_\alpha \cdot \bar{C}_\beta (1+t)^{a(|\alpha|)+b(|\beta|)} \right) \quad (x \in K; t > 0).$$

Da die Summe zweier konvexer Folgen wieder konvex ist und konvexe Folgen ihr Maximum in den Endpunkten annehmen, hat man für $1 \leq j \leq |\gamma|$

$$a(j) + b(|\gamma|-j) \leq \max\{a(0)+b(|\gamma|), a(|\gamma|)+b(0)\}$$

und folglich gilt (A.8). ■

Lemma A.3:

Seien $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset \tilde{U}$ kompakt und $f \in C^\kappa(U, \mathbb{R})$, sowie $g \in C^\kappa(\tilde{U}, \mathbb{R}^n)$ mit $g(\tilde{U}) \subset U$ und $\kappa \in \mathbb{N}$.

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $1 \leq |\alpha| \leq \kappa$ gebe es eine positive Konstante $C_{|\alpha|}$, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq n$

$$|D^\alpha g_j(x)| \leq C_{|\alpha|} \quad (x \in K) \tag{A.9}$$

erfüllt ist. Dann gilt für alle Multiindizes γ mit $1 \leq |\gamma| \leq \kappa$

$$D^\gamma(f \circ g)(x) = \sum_{0 < |\beta| \leq |\gamma|} D^\beta f(g(x)) \cdot G_{\gamma, \beta}(x) \quad (x \in \tilde{U}), \tag{A.10}$$

wobei die Funktionen $G_{\gamma, \beta}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $1 \leq |\beta| \leq |\gamma|$ Abschätzungen der Form

$$|G_{\gamma, \beta}(x)| \leq C_{|\gamma|, |\beta|} \max_{\substack{k_1 + \dots + k_{|\beta|} = |\gamma| \\ k_j \geq 1}} C_{k_1} \cdots C_{k_{|\beta|}} \quad (x \in K) \tag{A.11}$$

genügen mit

$$C_{|\gamma|, i} = \frac{1}{i!} \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j^{|\gamma|} \quad (1 \leq i \leq |\gamma|). \tag{A.12}$$

Beweis: Zunächst zeigen wir die verallgemeinerte Kettenregel durch vollständige Induktion nach $|\gamma|$:

$$D^\gamma(f \circ g)(x) = \sum_{i=1}^{|\gamma|} \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^n \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_i} f(g(x)) \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma, i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \prod_{j=1}^i D^{\alpha_j} g_{k_j}(x) \tag{A.13}$$

$(1 \leq |\gamma| \leq \kappa, x \in \tilde{U}),$

wobei $M_{\gamma,i} := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in \mathbb{N}_0^{n \cdot i} \mid \gamma = \sum_{j=1}^i \alpha_j\}$ und $c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \in \mathbb{N}_0$ für $(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma,i}$.

Für

$$c_{|\gamma|,i} := \begin{cases} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma,i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} & ; 1 \leq i \leq |\gamma| \\ 0 & ; i = 0 \text{ oder } i > |\gamma| \geq 1 \end{cases}$$

gilt die Rekursionsformel

$$c_{|\gamma|,i} = c_{|\gamma|-1,i-1} + i c_{|\gamma|-1,i} \quad (|\gamma| \geq 2; i \geq 1). \quad (\text{A.14})$$

① Induktionsanfang $|\gamma| = 1$: $\partial_i(f \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \partial_k f(g(x)) c_{1,1} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x)$ mit $c_{1,1} = 1$.

② Induktionsschritt $|\gamma| = m \rightarrow m+1 = |\gamma|+1$: Sei $m < \kappa$ und $\epsilon_j := (\delta_{1,j}, \dots, \delta_{n,j}) \in \mathbb{N}_0^n$, dann erhält man mit der Induktionsannahme

$D^{\gamma+\epsilon_j}(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned} &= \partial_j \left(\sum_{i=1}^{|\gamma|} \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^n \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_i} f(g(x)) \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma,i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \prod_{l=1}^i D^{\alpha_l} g_{k_l}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{|\gamma|} \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^n \left(\sum_{k_j=1}^n \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_i} \partial_{k_j} f(g(x)) \frac{\partial_j g_{k_j}}{\partial x_i}(x) \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma,i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \prod_{l=1}^i D^{\alpha_l} g_{k_l}(x) \right. \\ &\quad \left. + \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_i} f(g(x)) \sum_{p=1}^i \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma,i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \prod_{l=1}^i D^{\alpha_l + \delta_{p,l} \epsilon_j} g_{k_l}(x) \right) \\ &= \sum_{i=2}^{|\gamma|+1} \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^n \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_i} f(g(x)) \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) \in M_{\gamma,i-1}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})} \prod_{l=1}^{i-1} D^{\alpha_l} g_{k_l}(x) D^{\epsilon_j} g_{k_i}(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{|\gamma|} \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^n \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_i} f(g(x)) \sum_{p=1}^i \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma,i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \prod_{l=1}^i D^{\alpha_l + \delta_{p,l} \epsilon_j} g_{k_l}(x). \end{aligned}$$

Da $M_{\gamma,1} = \{\gamma\}$ und $M_{\gamma,m} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n \cdot m}) \mid \text{es gibt } i = 1, \dots, n \text{ mit } \alpha_j = \epsilon_i \text{ (} j = 1, \dots, n \cdot m)\} \subset \mathbb{N}_0^{n \cdot m}$, sowie $c_{m,1} = c_{m,m} = 1$ gelten, was mit Hilfe der Induktionsannahme und des Induktionsanfangs gefolgert werden kann, können wir in der Berechnung von $D^{\gamma+\epsilon_j}(f \circ g)$ fortfahren und erhalten

$$\begin{aligned}
& D^{\gamma+\epsilon} j(f \circ g)(x) \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_{m+1}=1}^n \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_{m+1}} f(g(x)) D^{\epsilon_j} g_{k_{m+1}}(x) \prod_{p=1}^n \prod_{l=1}^{\gamma_p} D^{\epsilon_p} g_{k_l}(x) + \sum_{k=1}^n \partial_k f(g(x)) D^{\gamma} g_k(x) \\
&+ \sum_{i=2}^m \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^n \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_i} f(g(x)) \left(\sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) \in M_{\gamma, i-1}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})} \prod_{l=1}^{i-1} D^{\alpha_l} g_{k_l}(x) D^{\epsilon_j} g_{k_i}(x) \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \left. + \sum_{p=1}^i \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma, i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \prod_{l=1}^i D^{\alpha_l + \delta_{p, l} \epsilon_j} g_{k_l}(x) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{k_1, \dots, k_i=1}^n \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_i} f(g(x)) \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma+\epsilon, i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \prod_{l=1}^i D^{\alpha_l} g_{k_l}(x).
\end{aligned}$$

Hierbei erweist sich in der letzten Gleichung die Gültigkeit der Rekursionsformel (A.14):

$$\begin{aligned}
c_{m+1, i} &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma+\epsilon, i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \\
&= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) \in M_{\gamma, i-1}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})} + i \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in M_{\gamma, i}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)} \\
&= c_{m, i-1} + i c_{m, i} \quad (2 \leq i \leq m).
\end{aligned}$$

Damit sind die in (A.13) und (A.14) gemachten Aussagen bewiesen.

Setzt man

$$G_{\gamma, \beta}(x) := \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{|\beta|}) \in M_{\gamma, |\beta|}} c_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{|\beta|})} \prod_{p=1}^n \prod_{l=\beta_{p-1}+1}^{\beta_p} D^{\alpha_l} g_p(x)$$

für alle $x \in \tilde{U}$, $1 \leq |\beta| \leq |\gamma|$ (mit der Vereinbarung $\beta_0 := 0$), so folgt (A.10) unmittelbar aus (A.13).

Zum Nachweis von (A.11) genügt es zu zeigen, daß für alle $m \in \mathbb{N}$

$$c_{m, i} = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j^m \quad (i \in \mathbb{N}_0) \quad (\text{A.15})$$

gilt (mit der Konvention $0! = 1$), was wiederum durch vollständige Induktion nach m geschieht.

$m = 1$: Für $i = 0$ und $i = 1$ ist (A.15) offensichtlich erfüllt. Sei also $i > 1$, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j &= \frac{1}{(i-1)!} \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} \\ &= \frac{(-1)^{i+1}}{(i-1)!} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i-1}{j} \\ &= 0 = c_{1,i}. \end{aligned}$$

$m \rightarrow m+1$: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \mathbb{N}$. Dann ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsformel (A.14) unter der Induktionsannahme:

$$\begin{aligned} c_{m+1,i} &= c_{m,i-1} + i c_{m,i} \\ &= \frac{1}{(i-1)!} \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} \binom{i-1}{j} j^m + \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j^m \right) \\ &= \frac{1}{(i-1)!} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \left((-1)^{i-1-j} \frac{i-j}{i} \binom{i}{j} + (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \right) j^m + i^m \right) \\ &= \frac{1}{(i-1)!} \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j} \frac{j}{i} \binom{i}{j} j^m + \frac{1}{i} i^{m+1} \right) \\ &= \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j^{m+1}. \end{aligned}$$

Wegen $c_{m+1,0} = 0$, gilt (A.15) trivialerweise auch für $i = 0$. ■

Im Hinblick auf die Anwendung von Lemma A.3 auf Verknüpfungen einer differenzierbaren Funktion f mit differenzierbaren Funktionen g_t , die von einem positiven reellen Parameter t abhängen, wollen wir noch eine Aussage über das Verhalten von $D^7(\text{f} \circ g_t)$ in Bezug auf den Parameter t bereitstellen.

Lemma A.4:

Seien $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset \tilde{U}$ kompakt, $\kappa \in \mathbb{N}$ und $f \in C^\kappa(U, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, daß für alle Multiindizes β mit $1 \leq |\beta| \leq \kappa$

$$|D^\beta f(y)| \leq \bar{C}_{|\beta|} (1 + |y|)^{b(|\beta|)} \quad (y \in U) \quad (\text{A.16})$$

mit positiven Konstanten $\bar{C}_{|\beta|}$ und einer konvexen Folge $b(j)$ mit negativen Gliedern erfüllt ist.

Weiterhin sei eine Funktionenschar $\{g_t \in C^\kappa(\tilde{U}, \mathbb{R}^n) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ mit $g_t(\tilde{U}) \subset U$ ($t \in \mathbb{R}_+$) gegeben, so daß

$$|g_t(x)| \geq C_\theta t \quad (x \in K; t > T_K) \quad (\text{A.17})$$

mit von K abhängigen $T_K \geq 1$ und $C_\theta > 0$, sowie

$$|D^\alpha g_t(x)| \leq C_{|\alpha|} t^{a(|\alpha|)} \quad (x \in K; t > 1) \quad (\text{A.18})$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $1 \leq |\alpha| \leq \kappa$ gelte, wobei $C_{|\alpha|} > 0$ und $a(j)$ eine konvexe Folge mit nichtnegativen Gliedern ist.

Dann gilt für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $1 \leq |\gamma| \leq \kappa$

$$|D^\gamma (f \circ g_t)(x)| \leq \hat{C}_{|\gamma|} t^{c(|\gamma|)} \quad (x \in K; t > 1), \quad (\text{A.19})$$

wobei

$$c(j) = \max\{b(j) + j a(1), b(1) + a(j)\} \quad (1 \leq j \leq \kappa)$$

und $\hat{C}_{|\gamma|} > 0$ alleine durch die Konstanten $C_\theta, C_1, \dots, C_{|\gamma|}, \bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{|\gamma|}$ und T_K bestimmt ist.

Beweis: Mit Lemma A.3 ergibt sich für $x \in K$ und $t \in \mathbb{R}_+$:

$$|D^\gamma (f \circ g_t)(x)| = \sum_{i=1}^{|\gamma|} n^i \cdot \bar{C}_i \cdot C_{|\gamma|,i} (1 + |g_t(x)|)^{b(i)} \max_{\substack{k_1 + \dots + k_i = |\gamma| \\ k_j \geq 1}} (C_{k_1} \dots C_{k_i} t^{\sum_{j=1}^i a(k_j)}). \quad (\text{A.20})$$

Um den letzten Faktor in den Summanden von (A.20) abzuschätzen, untersuchen wir zunächst den Exponenten von t und behaupten:

$$\max_{\substack{k_1 + \dots + k_i = k \\ k_j \geq 1}} \left(\sum_{j=1}^i a(k_j) \right) \leq (i-1) a(1) + a(k-i+1) \quad (1 \leq i \leq k \leq \kappa). \quad (\text{A.21})$$

Wir zeigen (A.21) durch vollständige Induktion nach k :

$k = 1$: ist klar.

$k \rightarrow k+1$: Für $i = 1$ und $i = k+1$ ist (A.21) offensichtlich erfüllt. Sei also $2 \leq i \leq k$, so gilt

$$\sum_{j=1}^i k_j = k+1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{i-1} k_j = k+1-k_i =: \tilde{k}_i \leq k .$$

Nach Induktionsannahme ist damit

$$\begin{aligned} \max_{\substack{k_1+\dots+k_{i-1}=\tilde{k}_i \\ k_j \geq 1}} \left(\sum_{j=1}^i a(k_j) \right) &\leq (i-2) a(1) + a(\tilde{k}_i - (i-1) + 1) \\ &\leq (i-2) a(1) + a(k+1-k_i-i+2) . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Da a konvex ist, nimmt der zweite Summand auf der rechten Seite von (A.22) sein Maximum für $1 \leq k_i \leq k+2-i$ in den Endpunkten $k_i = 1$ und $k_i = k+2-i$ an und infolge der Voraussetzung, daß a nichtnegativ ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} a(k+1-k_i-i+2) &\leq \max\{a(1), a(k+2-i)\} \\ &\leq a(1) + a(k+2-i) , \end{aligned}$$

was zusammen mit (A.22) die Induktionsbehauptung für $2 \leq i \leq k$ ergibt.

Damit ist (A.21) gezeigt und im Anschluß an (A.20) läßt sich mit

$$C'_k := k \cdot \max_{1 \leq i \leq k} \left(n^i \cdot C_{k,i} \cdot \bar{C}_i \max_{k_1+\dots+k_i=k} C_{k_1} \cdots C_{k_i} \right) \quad (1 \leq k \leq \kappa) \quad (\text{A.23})$$

für $t > T_\kappa \geq 1$ weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} |D^\gamma(f \circ g_t)(x)| &\leq C'_{|\gamma|} \cdot \max_{1 \leq i \leq |\gamma|} \left((1 + |g_t(x)|)^{b(i)} t^{(i-1)a(1)+a(|\gamma|-i+1)} \right) \\ &\leq C'_{|\gamma|} \cdot \max_{1 \leq i \leq |\gamma|} \left(C_0^{b(i)} t^{b(i)+(i-1)a(1)+a(|\gamma|-i+1)} \right) . \end{aligned}$$

Die Folge $b(i) + (i-1) a(1) + a(|\gamma|-i+1)$ ist als Summe konvexer Folgen wieder konvex und nimmt infolgedessen ihr Maximum für $1 \leq i \leq |\gamma|$ in den Punkten $i = 1$ oder $i = |\gamma|$ an, so daß mit

$$c(k) := \max\{b(k) + k a(1), b(1) + a(k)\} \quad (1 \leq k \leq \kappa)$$

$$b(i) + (i-1) a(1) + a(|\gamma|-i+1) \leq c(|\gamma|) \quad (1 \leq i \leq |\gamma|) \quad (\text{A.24})$$

gilt. Andererseits ist für $1 < t \leq T_K$

$$\begin{aligned} |D^\gamma(f \circ g_t)(x)| &\leq C'_{|\gamma|} \cdot \max_{1 \leq i \leq |\gamma|} t^{(i-1)a(1)+a(|\gamma|-i+1)} \\ &\leq C'_{|\gamma|} \cdot \max_{1 \leq i \leq |\gamma|} \left(T_K^{-b(i)} \left(\frac{t}{T_K} \right)^{-b(i)} t^{b(i)+(i-1)a(1)+a(|\gamma|-i+1)} \right) \\ &\leq C'_{|\gamma|} \cdot \max_{1 \leq i \leq |\gamma|} T_K^{-b(i)} t^{c(|\gamma|)}, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung die Voraussetzung, daß b negativ ist und (A.24) benutzt wurden.

Setzt man

$$\hat{C}_{|\gamma|} := C'_{|\gamma|} \cdot \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq |\gamma|} C_0^{b(i)}, \max_{1 \leq i \leq |\gamma|} T_K^{-b(i)} \right\}, \quad (\text{A.25})$$

so ergibt sich (A.19), wobei (A.25) und (A.23) die Abhängigkeit der Konstanten $\hat{C}_{|\gamma|}$ von den in den Voraussetzungen (A.16) - (A.18) vorgegebenen Konstanten dokumentiert. ■

Wir wollen an dieser Stelle den Beweis des Lemmas 1.18 nachliefern. Zu diesem Zweck notieren wir noch einmal die Behauptung:

Lemma A.5: (identisch mit Lemma 1.18)

Sei V ein langreichweitiges C^κ - Potential mit Abfallerponent $\delta > 0$.

Dann gibt es eine Zerlegung $V = V_S + V_L$, so daß $V_L \in C^\infty$ der Voraussetzung 1.17 mit $\kappa_0 = \kappa$ und $\delta_0 = \delta$ genügt und der kurzreichweitige Anteil V_S für alle Multiindizes α mit $0 \leq |\alpha| \leq \kappa-1$

$$|D^\alpha V_S(x)| \leq C_S (1 + |x|)^{-(1+\delta+|\alpha|\rho)} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (\text{A.26})$$

mit einer Konstanten $C_S > 0$ und $\rho := \frac{\kappa-1}{\kappa}$ erfüllt.

Beweis:

Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(x) = 1$ für $|x| < 1$ und $\psi(x) = 0$ für $|x| > 2$. Wir definieren für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$V_\nu(x) := \begin{cases} \psi(x) V(x) & ; \nu = 0 \\ \left(\psi\left(\frac{x}{2^\nu}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{\nu-1}}\right) \right) V(x) & ; \nu \in \mathbb{N} \end{cases}$$

und erhalten

$$\text{supp } V_\nu \subset \begin{cases} \overline{B_2(0)} & ; \nu = 0 \\ \overline{B_{2^{\nu+1}}(0)} \setminus B_{2^{\nu-1}}(0) & ; \nu \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

sowie

$$D^\alpha V(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} D^\alpha V_\nu(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \kappa$, wobei die Gleichheit im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz zu verstehen ist. Ist nämlich $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq \kappa$ und $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $K \subset B_{2^m}(0)$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so erhält man durch Anwendung der Produktregel aus Lemma A.1 für alle $l \geq m$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^l D^\alpha V_\nu(x) &= D^\alpha \left(\psi\left(\frac{x}{2^m}\right) V(x) \right) \\ &= \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \psi\left(\frac{x}{2^m}\right) D^{\alpha-\beta} V(x) \\ &= \psi\left(\frac{x}{2^m}\right) D^\alpha V(x) \\ &= D^\alpha V(x) \quad (x \in K), \end{aligned}$$

da auf $B_1(0)$, $\psi \equiv 1$ und somit $D^\beta \psi \equiv 0$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| \geq 1$ gilt.

Weiterhin gibt es ein $C_\psi > 0$, so daß

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq C_\psi \quad (x \in \mathbb{R}^n; |\alpha| \leq \kappa)$$

gilt. Somit ergibt sich für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq \kappa$ und alle $\nu \in \mathbb{N}$

$$|D^\alpha (\psi\left(\frac{x}{2^\nu}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{\nu-1}}\right))| \leq C_\psi (1 + 2^\kappa) 2^{-\nu|\alpha|}$$

und

$$\begin{aligned} |D^\alpha V(x)| &\leq C_K (1 + |x|)^{-|\alpha|-\delta} \\ &\leq C_K 2^{(1-\nu)(|\alpha|+\delta)} \\ &\leq C_K 2^{\kappa+\delta} 2^{-\nu(|\alpha|+\delta)} \end{aligned}$$

für alle $x \in \text{supp } V_\nu$. Mit Lemma A.1 folgt dann für alle $|\alpha| \leq \kappa$, $\nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |D^\alpha V_\nu(x)| &\leq C_K \cdot C_\psi 2^{\kappa+\delta} (1 + 2^\kappa) 2^{|\alpha|} \cdot \max_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} 2^{-\nu(|\beta|+|\gamma|+\delta)} \\ &\leq \tilde{C}_K 2^{-\nu(|\alpha|+\delta)} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{A.27}$$

mit einer von ν unabhängigen Konstanten $\tilde{C}_K > 0$.

Wähle nun $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \chi \subset \overline{B_1(0)}$ und den Eigenschaften

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(y) dy = 1 \tag{A.28}$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} y^\beta \chi(y) dy = 0 \quad (0 < |\beta| < \kappa). \tag{A.29}$$

Die Existenz eines solchen χ sieht man folgendermaßen ein:

Sei $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\omega(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\text{supp } \omega = [-1, 1]$. Dann definiert ω ein Maß

$$\mu_\omega(I) := \int_I \omega(x) dx$$

für alle Lebesgue-meßbaren Teilmengen I von $[-1, 1]$. Durch Orthonormalisierung der Polynome $x, x^2, \dots, x^{\kappa-1}$ in $L^2([-1, 1], \mu_\omega)$ erhält man Polynome $p_1, \dots, p_{\kappa-1}$ mit

$$U_\kappa := \text{span} \{x, x^2, \dots, x^{\kappa-1}\} = \text{span} \{p_1, \dots, p_{\kappa-1}\}.$$

Bezeichnet \tilde{p}_κ die orthogonale Projektion von x^κ auf U_κ (bezüglich $d\mu_\omega$), so ist mit $p_\kappa(x) := x^\kappa - \tilde{p}_\kappa(x)$ ($x \in [-1, 1]$), $p_\kappa \perp U_\kappa$, d. h. mit $\tilde{\chi}(x) := c_1 \omega(x) p_\kappa(x)$ gilt:

$$\int_{-1}^1 \tilde{\chi}(x) x^k dx = 0 \quad (1 \leq k \leq \kappa-1), \text{ wobei } c_1 := \left(\int_{-1}^1 p_\kappa(x) \omega(x) dx \right)^{-1}.$$

Setzt man $\chi(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i=1}^n \tilde{\chi}(x_i)$ ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$), so leistet χ das Gewünschte und wir definieren für $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\chi_\nu(x) := \frac{1}{2^{n\nu\rho}} \cdot \chi\left(\frac{x}{2^{\nu\rho}}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

so daß $\text{supp } \chi_\nu \subset \overline{B_{2^{\nu\rho}}(0)}$ gilt.

Wegen $V_\nu \in L_{\text{loc}}^1$ und $\chi_\nu \in C_0^\infty$ ist die Faltung

$$\bar{V}_\nu(x) := (V_\nu * \chi_\nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} V_\nu(x-y) \chi_\nu(y) dy$$

für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ wohldefiniert, beliebig oft differenzierbar und für hinreichend großes $\nu \in \mathbb{N}$, das etwa $\frac{\nu-2}{\nu} > \rho$ erfüllt, ist

$$\text{supp } \bar{V}_\nu \subset B_{2^{\nu+2}}(0) \setminus \overline{B_{2^{\nu-2}}(0)}, \quad (\text{A.30})$$

was man, wie folgt, einsieht:

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \text{supp } \chi_\nu$ ist einerseits

$$2^{\nu-1} \leq |x-y| \leq |x| + |y| \leq |x| + 2^{\nu\rho} < |x| + 2^{\nu-2}$$

und andererseits

$$2^{\nu+1} \geq |x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - 2^{\nu\rho} > |x| - 2^\nu.$$

Zur Untersuchung des abklingenden Verhaltens von $D^\alpha \bar{V}_\nu$ unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: $|\alpha| \leq \kappa$

$$\begin{aligned} |D^\alpha \bar{V}_\nu(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha V_\nu(x-y)| |\chi_\nu(y)| dy \\ &\leq \bar{C}_K 2^{-\nu(\kappa+\delta)} \quad (x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

wobei von (A.27) Gebrauch gemacht wurde und $\bar{C}_K := \tilde{C}_K \int_{\mathbb{R}^n} |\chi(y)| dy$ von ν unabhängig ist.

2. Fall: $|\alpha| > \kappa$

Sei $\alpha = \alpha_0 + \beta$ mit $|\alpha_0| = \kappa$, dann lassen wir wegen $\frac{\partial}{\partial x_i} V_\nu(x - y) = -\frac{\partial}{\partial y_i} V_\nu(x - y)$ ($1 \leq i \leq n$) $|\beta|$ Ableitungen mittels partieller Integration auf χ_ν wirken:

$$\begin{aligned} |D^\alpha \bar{V}_\nu(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\alpha_0} V_\nu(x - y) D_y^\beta \chi_\nu(y) dy \right| \\ &\leq \tilde{C}_K 2^{-\nu(|\alpha_0| + \delta)} 2^{-\nu\rho|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} |D_y^\beta \chi_\nu(y)| dy \\ &\leq \bar{C}_\alpha 2^{-\nu(\kappa + \delta + \rho(|\alpha| - \kappa))} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{A.32}$$

mit Konstanten $\bar{C}_\alpha > 0$, die nicht von ν abhängen.

Sei nun $x \in \overline{B_{2^m}(0)} \setminus \overline{B_{2^{m-1}}(0)}$ für ein $m > \frac{2}{1-\rho}$. Dann ist $x \in \text{supp } \bar{V}_\nu$ für alle $\nu \in M_m$, wo $M_m := \{m-2, m-1, m, m+1\}$, und $x \notin \text{supp } \bar{V}_\nu$ für $\nu \notin M_m$, was aus (A.30) erschen werden kann, da $m > \frac{2}{1-\rho}$ die Bedingung $\frac{\nu-2}{\nu} > \rho$ impliziert.

Setzt man für ein $l \in \mathbb{N}$

$$V_L^{(l)}(x) := \sum_{\nu=0}^l \bar{V}_\nu(x),$$

so sieht man, daß für ein beliebiges Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ und für ein hinreichend groß gewähltes $l_0 \in \mathbb{N}$

$$D^\alpha V_L^{(l)}(x) = D^\alpha V_L^{(l_0)}(x)$$

für alle $l \geq l_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in K$ gilt. Somit konvergiert $V_L^{(l)}$ für $l \rightarrow \infty$ in der C^∞ - Topologie

$$V_L := \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{V}_\nu.$$

Mit den in (A.31) und (A.32) gewonnenen Abschätzungen ergibt sich für $x \in \overline{B_{2^m}(0)} \setminus \overline{B_{2^{m-1}}(0)}$, wobei $m > \frac{2}{1-\rho}$ vorausgesetzt sei,

$$\begin{aligned} |D^\alpha V_L(x)| &\leq \sum_{\nu \in M_m} |D^\alpha \bar{V}_\nu(x)| \\ &\leq 4 \bar{C}_K 2^{-(m-2)(|\alpha| + \delta)} \\ &\leq 4 \cdot 5^{(|\alpha| + \delta)} \bar{C}_K (1 + |x|)^{-(|\alpha| + \delta)} \quad (|\alpha| \leq \kappa), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |D^\alpha V_L(x)| &\leq 4 \bar{C}_\alpha 2^{-(m-2)(\kappa+\delta+\rho(|\alpha|-\kappa))} \\ &\leq 4 \cdot 5^{(|\alpha|+1+\delta)} \bar{C}_\alpha (1+|x|)^{-(1+\delta+|\alpha|\rho)} \quad (|\alpha| > \kappa), \end{aligned}$$

womit gezeigt wäre, daß V_L die Voraussetzung 1.17 mit $\kappa_0 = \kappa$ und $\delta_0 = \delta$ erfüllt. Bleibt noch zu zeigen, daß $V_S := V - V_L$ den in (A.26) angegebenen Abschätzungen genügt.

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$V_S(x) = V(x) - V_L(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (V_\nu(x) - \bar{V}_\nu(x)), \quad (\text{A.33})$$

wobei die letzte Gleichung wieder im Sinne der Konvergenz bzgl. der C^κ - Topologie zu verstehen ist, und

$$\begin{aligned} V_\nu(x) - \bar{V}_\nu(x) &= V_\nu(x) - (V_\nu * \chi_\nu)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} V_\nu(x) \chi(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} V_\nu(x-y) \chi_\nu(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (V_\nu(x) - V_\nu(x-2^{\nu\rho}y)) \chi(y) dy \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Da $V_\nu \in C^\kappa$, können wir V_ν in x nach Taylor mit Restglied vom Grad κ entwickeln, d. h. es gibt ein $\theta \in [0, 1]$, so daß mit $\tau := 2^{\nu\rho}$ gilt

$$V_\nu(x - \tau y) = \sum_{|\beta| \leq \kappa-1} D^\beta V_\nu(x) \frac{(-\tau y)^\beta}{\beta!} + \sum_{|\beta|=\kappa} D_x^\beta V_\nu(x - \theta \tau y) \frac{(-\tau y)^\beta}{\beta!}.$$

Mit der Eigenschaft (A.29) von $\chi \in C_0^\infty$ erhält man somit aus (A.34)

$$V_\nu(x) - \bar{V}_\nu(x) = \sum_{|\beta|=\kappa} (-1)^{\kappa+1} \frac{\tau^\kappa}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta V_\nu(x - \theta \tau y) y^\beta \chi(y) dy$$

und nach Ausführung $|\alpha|$ -facher partieller Integration für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq \kappa-1$

$$\begin{aligned} |D^\alpha (V_\nu - \bar{V}_\nu)(x)| &\leq \tau^\kappa \sum_{|\beta|=\kappa} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\beta V_\nu(x - \theta \tau y)| (\theta \tau)^{-|\alpha|} \frac{|y|^\kappa}{\beta!} |D_y^\alpha \chi(y)| dy \\ &\leq \tilde{C}_K 2^{-\nu(\kappa+\delta)} \tau^{\kappa-|\alpha|} \sum_{|\beta|=\kappa} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^\kappa}{\beta!} |D_y^\alpha \chi(y)| dy \\ &\leq C'_K 2^{-\nu(\kappa+\delta-\rho(\kappa-|\alpha|))} \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Ähnlich wie bei den Betrachtungen des langreichweitigen C^∞ - Anteils von V erkennt man, daß ein hinreichend großes $|x|$ in den Trägern von höchstens 4 verschiedenen Summanden der rechten Seite von (A.33) enthalten ist. Mit (A.35) folgt daher für alle $x \in \overline{B_{2^m}(0)} \setminus \overline{B_{2^{m-1}}(0)}$ mit $m > m_0$, wo m_0 genügend groß gewählt ist,

$$\begin{aligned} |D^\alpha V_S(x)| &\leq \sum_{\nu \in M_m} |D^\alpha (V_\nu - \bar{V}_\nu)(x)| \\ &\leq 4 C'_K 2^{-(m-2)(\kappa + \delta + \rho(|\alpha| - \kappa))} \\ &\leq 4 \cdot 5^{(\kappa+1+\delta)} C'_K (1 + |x|)^{-(1+\delta+|\alpha|\rho)} \end{aligned}$$

für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq \kappa - 1$. ■

Quellenverzeichnis

- [1] Alsholm, P. : Wave operators for long-range scattering, *J. Math. Anal. Appl.* **59** (1977), 550–572.
- [2] Buslaev, V. S. and Matveev, V. B. : Wave operators for the Schrödinger equation with a slowly decreasing potential, *Theor. Math. Phys.* **2** (1970), 266–274 (Englische Übersetzung aus dem Russischen)
- [3] Cook, J. M. : Convergence to the Møller wave matrix, *J. Math. Phys.* **36** (1957), 82–87
- [4] Dollard, J. D. : Asymptotic convergence and the Coulomb interaction, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 729–738
- [5] Dollard, J. D. : Scattering into cones, *Comm. math. Phys.* **12** (1969), 193–203
- [6] Hörmander, L. : The existence of wave operators in scattering theory, *Math. Zeitschr.* **146** (1976), 69–91
- [7] Ikebe, T. and Isozaki, H. : Completeness of modified wave operators for long-range potentials, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **15** (1979), 679–718
- [8] Isozaki, H. and Kitada, H. : Modified wave operators with time-independent modifiers, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math.* **32** (1985), 77–104
- [9] Kato, T. : On finite dimensional perturbations of self-adjoint operators, *J. Math. Soc. Jap.* **9** (1957), 997–1010
- [10] Kitada, H. : Scattering theory for Schrödinger operators with long-range potentials II, spectral and scattering theory, *J. Math. Soc. Jap.* **29** (1978), 603–632
- [11] Knabe, S. : Quantenmechanische Streutheorie bei langreichweitigen Potentialen, *Diplomarbeit an der TU Berlin* (1984)
- [12] Reed, M. and Simon, B. : *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Academic Press, New York (1979)
- [13] Rosenblum, M. : Perturbations of continuous spectrum and unitary equivalence, *Pacific J. Math.* **7** (1957), 260–264
- [14] Walter, W. : *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, Heidelberg (1972)